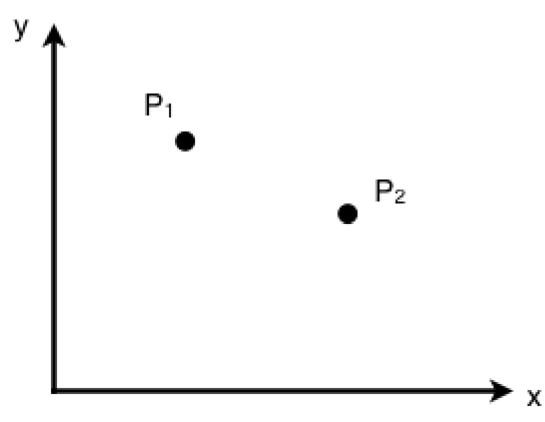
2 Cátedra II: Principios de relatividad

En esta clase estableceremos los principios básicos tras la formulación introducida por Einstein acerca del espacio y del tiempo (o simplemente espacio-tiempo). Partamos desarrollando algunos conceptos elementales que ya nos son familiares, pero que nos serán tremendamente útiles.

2.1 Sistemas de referencias

Partamos considerando, por simplicidad, un espacio Euclidiano de dos dimensiones. En un espacio tan simple como éste, usualmente nos interesa hablar de puntos y, si es posible, de figuras geométricas mas complejas. Hablemos solo de puntos por ahora. De más está decir que un sistema compuesto de un sólo punto es poco interesante, por lo que consideremos una configuración en la cual existen dos puntos P_1 y P_2.

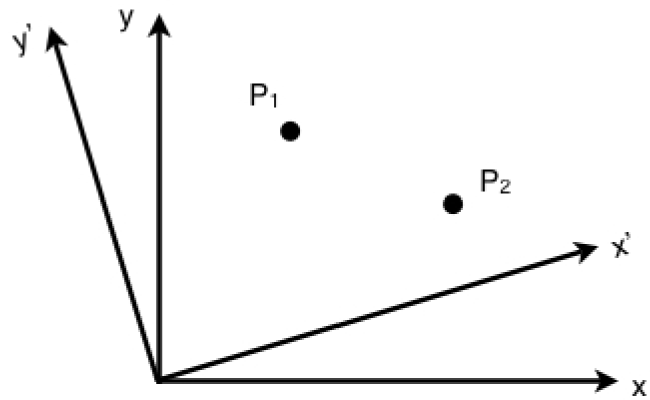
Típicamente, para estudiar estos puntos resulta útil introducir el concepto de sistemas de referencias. El tipo de sistema de referencia más familiar consiste en el sistema Cartesiano, consistente en dos ejes ordenados (x, y) dispuestos en forma perpendicular. Llamemos K a este sistema.



En tal sistema podemos asignar las coordenadas (x_1, y_1) para caracterizar la posición del primer punto y (x_2, y_2) para la posición del segundo. Más aun, apoyados de la noción de distancia[1] podemos decir que ambos puntos están separados por una distancia Δs dada por

$$\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2, \tag{2.1}$$

donde $\Delta x = x_2 - x_1$ y $\Delta y = y_2 - y_1$. Notemos, sin embargo, que bien pudimos haber adoptado el mismo sistema cartesiano pero con una configuración distinta relativa al primer sistema de referencia K. Supongamos por ejemplo un segundo sistema K' rotado en un ángulo θ con respecto al primero.



En tal sistema los puntos están caracterizados por las coordenadas (x_1', y_1') y (x_2', y_2') respectivamente. Noten sin embargo que, dado que sabemos que el segundo sistema de referencia esta rotado en un ángulo θ con respecto a K, podemos establecer una relación entre las coordenadas de ambos puntos en ambos sistemas. Más concretamente, podemos escribir:

$$x_1' = x_1 \cos\theta + y_1 \sin\theta, \qquad y_1' = -x_1 \sin\theta + y_1 \cos\theta, \tag{2.2}$$

$$x_2' = x_2 \cos\theta + y_2 \sin\theta, \qquad y_2' = -x_2 \sin\theta + y_2 \cos\theta. \tag{2.3}$$

En términos de vectores y matrices, estas relaciones se pueden escribir de forma más sucinta:

$$\vec{X}_1' = R \cdot \vec{X}_1 \qquad \vec{X}_2' = R \cdot \vec{X}_2 \tag{2.4}$$

donde $\vec{X}_1 = (x_1, y_1)$, etc... y la matriz de rotación R viene dada por

$$R = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}. \tag{2.5}$$

Quizás más importante que estas relaciones, es el hecho que los vectores diferencia $\Delta\vec{X} = \vec{X}_2 - \vec{X}_1$ y $\Delta\vec{X}' = \vec{X}_2' - \vec{X}_1'$ pueden ser relacionados mediante relaciones análogas

$$\Delta\vec{X}' = R \cdot \Delta\vec{X}. \tag{2.6}$$

[1] Más adelante veremos que esto significa incorporar el concepto de métrica a nuestro espacio.

Utilizando el hecho que $R^t \cdot R = R \cdot R^t = 1$ (donde t denota la traspuesta) podemos inferir la siguiente relación:

$$|\Delta\vec{X}'|^2 = \Delta\vec{X}'^t\Delta\vec{X}' = \Delta\vec{X}^t R^t R \Delta\vec{X} = |\Delta\vec{X}|^2 \tag{2.7}$$

Reconociendo que $|\Delta\vec{X}|^2 = \Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2$ y $|\Delta\vec{X}'|^2 = (\Delta s')^2 = (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2$, hemos pues deducido nuestro primer resultado importante:

$$(\Delta s')^2 = \Delta s^2. \tag{2.8}$$

En otras palabras, la distancia es una cantidad invariante bajo rotaciones. No importa como elijamos la configuración de nuestros sistemas de referencia para describir los puntos P_1 y P_2, la distancia entre ambos puntos es una cantidad que no puede depender de tales disposiciones.

Ejercicio 1. En el ejemplo anterior consideramos dos sistemas de referencia relacionados por una rotación. Esto significa que necesitamos proveer un sólo parámetro para relacionar las coordenadas en un sistema con otro. Extienda los resultados anteriores para el caso en que ambos sistemas no sólo están rotados uno con respecto al otro, pero también el origen de uno está trasladado con respecto al otro. ¿Cuántos parámetros se requieren para relacionar las coordenadas en ambos sistemas?

Ejercicio 2. Evidentemente, la discusión anterior puede extenderse a tres dimensiones o más. En el caso de tres dimensiones la cantidad relacionando a dos puntos que resulta invariante bajo rotaciones y traslaciones viene dada por $\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$. Repita el ejercicio anterior para el caso de tres dimensiones. ¿Cuántos parámetros se requieren ahora para relacionar las coordenadas de dos sistemas cartesianos?

2.2 Principio de relatividad Euclidiano

Hasta el momento hemos notado que la distancia entre dos puntos (partículas) en un espacio Euclidiano no depende de la forma (sistema) que elijamos para describirlos. Esto es ciertamente fácil de aceptar, ya que los sistemas de referencia los hemos impuesto nosotros para poder describir relaciones entre ambos puntos, pero la existencia de los puntos es independiente de nosotros, y por lo tanto, de nuestra elección de sistemas.

Evidentemente las relaciones físicas entre dos partículas, tales como interacciones, tampoco puede depender de la forma que escojamos para describirlas. Sin embargo, quizás por costumbre, insistimos en escribir las leyes de la física de tal forma que parecen depender de nuestros sistemas de referencia. Escribamos por ejemplo la tercera ley de Newton de una forma que nos resulte familiar:

$$m\vec{a} = m\ddot{\vec{X}} = \vec{F}. \tag{2.9}$$

En la expresión anterior $\vec{X}$ es el vector designando la posición de una partícula de masa m relativa al origen de cierto sistema, a la cual se le aplica una fuerza $\vec{F}$. Sin embargo, otro observador, dotado de intenciones y capacidades similares a las nuestras, pero contando con su sistema de referencia propio, escribirá exactamente la misma ecuación, provisto que tal sistema es estático con respecto al nuestro (es decir que las rotaciones y traslaciones que relacionan a su sistema con el nuestro no varían en el tiempo). Para ser más concretos, supongamos que estamos interesados en describir la interacción gravitacional de dos partículas P_1 y P_2 con masas m_1 y m_2 respectivamente, cuyas coordenadas en nuestro sistema K vienen dadas por $\vec{X}_1$ y $\vec{X}_2$ respectivamente. La fuerza en tal caso vienen dadas por

$$\vec{F} = -\frac{G_N m_1 m_2}{\Delta s^2}\frac{\Delta\vec{X}}{\Delta s}, \tag{2.10}$$

donde $\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$ y $\Delta\vec{X} = \vec{X}_2 - \vec{X}_1$, y por lo tanto, las ecuaciones de movimiento para ambas partículas viene dada por

$$\ddot{\vec{X}}_1 = \frac{G_N m_2}{\Delta s^2}\frac{\Delta\vec{X}}{\Delta s}, \qquad \ddot{\vec{X}}_2 = -\frac{G_N m_1}{\Delta s^2}\frac{\Delta\vec{X}}{\Delta s} \tag{2.11}$$

Supongamos que el sistema de referencia K' de este segundo observador está rotado con respecto a nuestro sistema K mediante una matriz de rotación R constante. Esto significa que las coordenadas de P_1 y P_2 escritas en K' están relacionadas con las nuestras a través de las relaciones

$$\vec{X}'_1 = RX_1 \qquad \vec{X}'_2 = RX_2. \tag{2.12}$$

Utilizando el hecho que la diferencia entre ambos vectores también satisface $\Delta\vec{X}' = R\Delta\vec{X}$, podemos deducir, multiplicando R por la izquierda de ambas ecuaciones en (2.11), la siguientes relaciones validas en K'

$$\ddot{\vec{X}}'_1 = \frac{G_N m_2}{(\Delta s')^2}\frac{\Delta\vec{X}'}{\Delta s'}, \qquad \ddot{\vec{X}}'_2 = -\frac{G_N m_1}{(\Delta s')^2}\frac{\Delta\vec{X}'}{\Delta s'} \tag{2.13}$$

donde, dado que R es constante, hemos explotado $R\ddot{\vec{X}}_1 = (R\vec{X}_1)^{\cdot\cdot} = \ddot{\vec{X}}'_1$. Para deducir la expresión anterior también fue importante recordar que $\Delta s^2 = (\Delta s')^2$ es un invariante bajo rotaciones. Hemos pues comprobado que las leyes de la gravitación de Newton son invariantes bajo rotaciones en cierto sentido: Estas son escritas en forma identicas en dos sistemas de referencias conectadas por rotaciones constantes.

Ejercicio 3. Compruebe que las leyes de Newton también se escriben en forma idéntica si ambos sistemas están conectados no solo por rotaciones constantes, pero también traslaciones constantes.

Ya estamos en condiciones de formular nuestro primer principio de relatividad. Llamemos a éste le principio de relatividad Euclidiano: Las leyes de la naturaleza son escritas de forma idéntica en todos los sistemas de referencia conectados por rotaciones y traslaciones constantes.

Ejercicio 4. Compruebe que las leyes de Newton fallan en satisfacer nuestro principio de relatividad Euclidiano si los ángulos de rotación relacionando dos sistemas de referencia están variando en el tiempo.

2.3 Sistemas de referencias inerciales

El lector atento ciertamente ha notado que nuestro análisis anterior es incompleto e insatisfactorio. Existe una clase particular de sistemas de referencia que son de importancia fundamental para el estudio de las leyes de Newton. Estos son los llamados sistemas de referencia inerciales. Definimos un sistema de referencia inercial como aquel en el cual un cuerpo en movimiento libre (un cuerpo en movimiento sobre el cual no están siendo aplicadas fuerzas externas) permanece moviendoce a velocidad constante. Si dos sistemas de referencia se mueven uniformemente uno respecto al otro, y uno de ellos es inercial, entonces el otro también es necesariamente inercial. Es decir, existe una clase de equivalencia infinita de sistemas inerciales.

Estrictamente hablando, las ecuaciones de gravitación de Newton (2.11) solo pueden ser escritas de tal forma si el sistema de referencia es inercial. Notemos por ejemplo que si no hubiese interacción gravitacional entre ambas partículas (lo que corresponde a apagar el acoplamiento de Newton $G_N \to 0$) entonces uno simplemente tendría

$$\ddot{\vec{X}}_1 = 0, \qquad \ddot{\vec{X}}_2 = 0, \tag{2.14}$$

y por lo tanto ambas partículas se moverían libremente a velocidad constante. Recordemos que para analizar la situación en la cual $G_N \neq 0$ debemos pensar en ambas partículas como parte de un sistema compuesto caracterizadas por un centro de masas

$$\vec{X}_0 = \frac{m_1 \vec{X}_2 + m_2 \vec{X}_1}{m_1 + m_2}. \tag{2.15}$$

De esta forma, ambas partículas son componentes de una partícula compuesta cuya ubicación en nuestro sistema de coordenadas viene dada por $\vec{X}_0$. En tal caso es fácil comprobar que tal partícula compuesta se mueve libremente con una velocidad constante, dado que en virtud de las ecuaciones de movimiento uno tiene la relación:

$$\ddot{\vec{X}}_0 = 0. \tag{2.16}$$

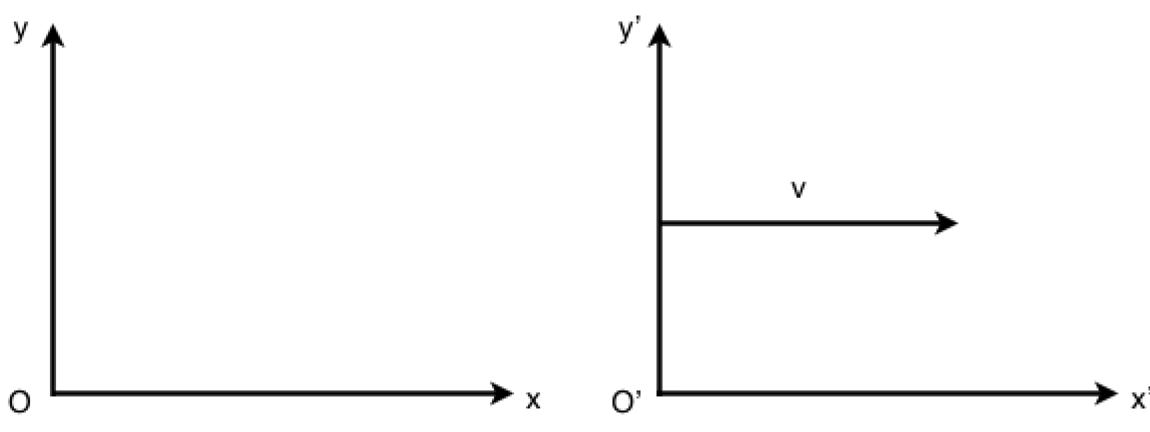
Si estuviésemos muy lejos de este sistema compuesto de partículas, de hecho sólo podríamos distinguir una única partícula P_0 a velocidad uniforme. Esto revela que nuestro sistema inicial en el cual escribimos las ecuaciones (2.11) efectivamente era inercial.

2.4 Principio de la relatividad

Usando como motivación nuestra ley de la relatividad Euclidiano, resulta natural hacer un esfuerzo para extenderla incorporando el concepto mas amplio de sistemas de referencia inerciales. La formulación de este principio es de hecho sencillo: Las leyes de la naturaleza deben poder ser escritas de forma idéntica en todos los sistemas de referencia inerciales. En otras palabras, las ecuaciones de movimiento expresando las leyes de la naturaleza son invariantes con respecto a las transformaciones de coordenadas dede un sistema inercial a otro. Pero ¿Cuáles son las transformaciones correctas relacionando las coordenadas de dos sistemas de referencia inerciales?

2.5 Principio de relatividad Galiliano

Supongamos observadores O y O' moviendose a una velocidad relativa $\vec{v}$ constante. Ambos observadores pueden, por derecho propio, establecer sus sistemas de referencia K y K' con los orígenes centrados en ellos mismos (ver figura). Tales sistemas son, por



definición, sistemas de referencias inerciales. La experiencia nos revela que una buena relación matemática entre ambos sistemas de coordenadas K y K' bajo estas circunstancias viene dada por las célebres transformaciones de Galileo. En el caso en que ambos sistemas están convenientemente alineados y la velocidad v de O' relativa a O es en la dirección del eje x, entonces estas transformaciones adquieren la forma sencilla

$$x' = x - vt, \qquad y' = y \qquad z' = z, \tag{2.17}$$

donde por simplicidad, también hemos asumido que en $t = 0$ la posición de ambos observadores es coincidente. Es fácil verificar que si un cuerpo se mueve a velocidad $\vec{u}$ en K, entonces el observador en O' lo registrara en su sistema de referencia K' a una velocidad $\vec{u}' = \vec{u} - \vec{v}$.

La verdadera importancia de las transformaciones de Galileo es que las leyes de Newton son invariantes bajo su acción, en el sentido que dichas leyes son expresadas de forma idéntica en ambos sistemas. Por dicho motivo, resulta natural especificar que el principio de relatividad expresado en 2.4 debe ser complementado con las transformaciones de Galileo. Veremos, sin embargo, que esta actitud es algo apresurada.

2.6 Interacciones

Observemos que las ecuaciones (2.11) poseen una propiedad desconcertante. Si se interviene en el sistema descrito por estas ecuaciones desplazando una de las partículas de su posición, la segunda partícula sentirá dicho efecto en forma instantánea. Esto se debe a que, en general, en mecánica Newtoniana, la fuerza entre partículas puede ser deducida a partir de un potencial de energía, que es función únicamente de las coordenadas de las partículas (mas bien de la distancia relativa).

Sin embargo, resulta natural exigir que la interacción entre partículas no sea instantáneo, y que, si algún cambio toma lugar en alguno de las partículas de algún sistema, influenciará a otras partículas solo después de un cierto lapso de tiempo. Esto implica la existencia de una velocidad máxima $v_{\rm max}$ de propagación de interacción.

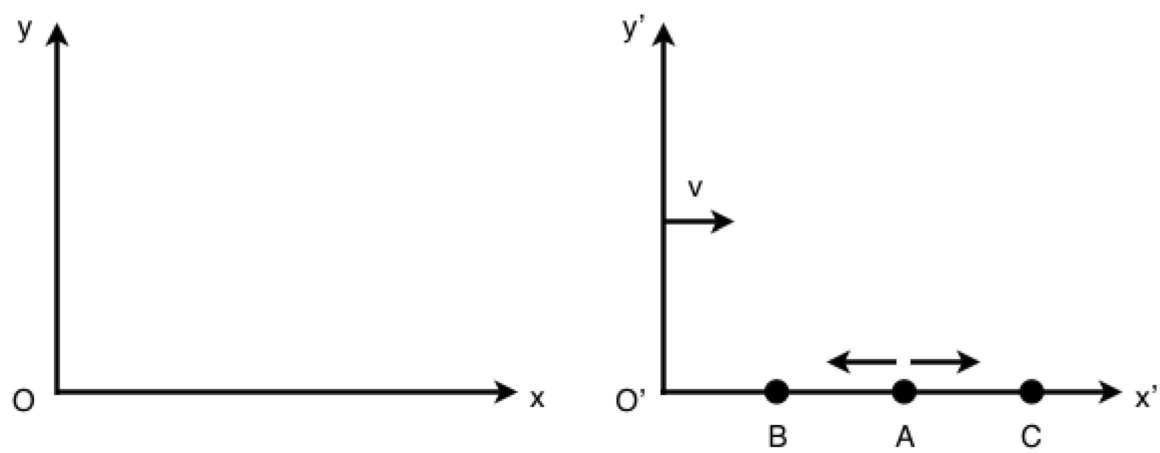
Dicha velocidad $v_{\rm max}$ es máxima dado que, si hubiesen partículas o cuerpos que fuesen capaces de exceder tal velocidad, sería posible realizar un proceso incluyendo una interacción con una velocidad mayor a la ya acordada velocidad máxima de interacción. Cuando nos refiramos a interacciones propagandose a tal velocidad, hablaremos de señales.

2.7 Principio de relatividad especial de Einstein

Si existe una velocidad máxima de propagación de señales, claramente el principio de relatividad Galiliano no puede estar correcto. En efecto, si las transformaciones de Galileo fuesen correctas, siempre se podría constatar una velocidad mayor que la de las señales mediante el movimiento relativo adecuado. Esto implica que debemos cambiar drásticamente nuestra visión del espacio y del tiempo, puesto que si hemos de persistir con el principio de relatividad expresado en 2.4, debemos aceptar que la velocidad $v_{\max}$ es universal y registrada de forma idéntica por todos los observadores utilizando sistemas de referencia inerciales para escribir las leyes de la naturaleza. En otras palabras, $v_{\max}$ es necesariamente una constate universal. Como vimos en la primera cátedra, la velocidad de la luz es un candidato ideal para ser identificada como dicha constante. Más adelante veremos que en efecto este es el caso y, por lo tanto

$$v_{\max} = c = 299792\text{Km/s}. \tag{2.18}$$

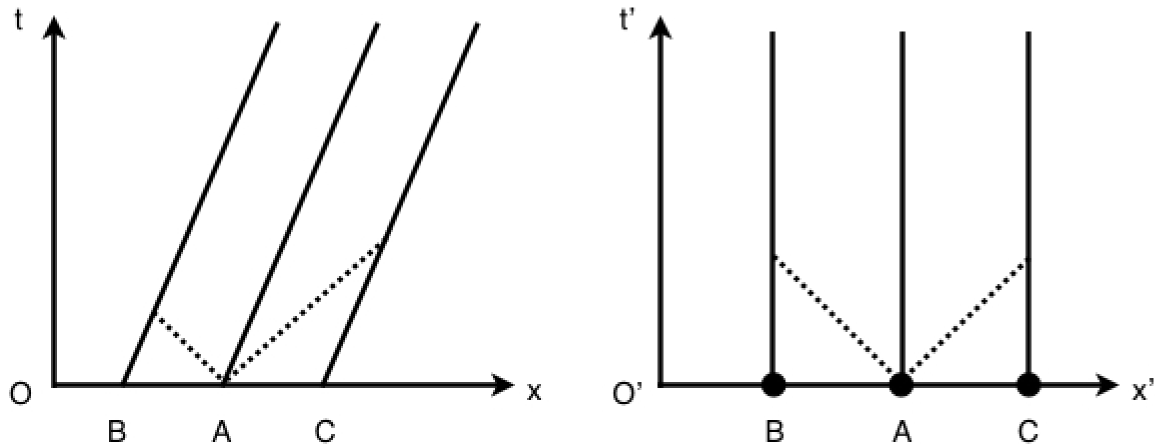
Es posible notar desde ya que ciertas nociones forjadas en el estudio de la mecánica no relativista (Newtoniana) son radicalmente afectadas. Una de ellas es el concepto de simultaneidad. En efecto, supongamos la misma situación descrita por la figura 2.5. Esta vez, sin embargo, el observador O' observa la siguiente situación: Dos señale abandonan una fuente A en reposo con respecto a K' en direcciones opuestas a lo largo del eje x. Dos receptores B y C, también en reposo con respecto a K' se encuentran a la misma distancia de A, y están dispuestos sobre el eje x para interceptar las señales. Desde el



punto de vista de O', claramente ambas señales llegan a B y C en forma simultánea, a con tiempos $t'_B = t'_C$. El observador O, sin embargo, utilizando su sistema de referencia K para registrar eventos, percibirá que las señales son interceptadas por B y C a tiempos t_B y t_C que no coinciden (ver siguiente figura).

2.8 Intervalos espacio-temporales

Evidentemente, para poder entender este tipo de discrepancias debemos reeducar nuestro sentido del espacio-tiempo. Para ello resulta conveniente introducir ciertos conceptos



básicos que nos serán útiles en el estudio de la relatividad especial. En general, trabajaremos con espacios geométricos donde el tiempo puede ser representado mediante un eje coordenado, al igual que el resto de las coordenadas espaciales (tal como en la figura anterior). En dichos espacios, eventos vienen representados por puntos, caracterizados por coordenadas determinando el tiempo en el que el evento ocurre y las coordenadas espaciales. Por otro lado, una partícula puede ser representada como una sucesión de eventos, siguiendo la trayectoria de la partícula. La curva compuesta por tal sucesión de eventos es denominada línea mundo, y en el caso que la partícula se propague a velocidad constante, la línea mundo corresponde una linea recta en un sistema de referencia inercial.

Ahora bien, supongamos dos eventos P_1 y P_2 arbitrarios. En general, dado un sistema inercial K, podremos asignar a estos eventos coordenadas espacio-temporales (t_1, x_1, y_1, z_1) y (t_2, x_2, y_2, z_2) respectivamente. Definamos al intervalo espacio temporal Δs^2 entre ambos eventos de la siguiente forma:

$$\Delta s^2 = -c^2 \Delta t^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2, \tag{2.19}$$

donde c es la velocidad de la luz y $\Delta t = t_2 - t_1$, $\Delta x = x_2 - x_1$, $\Delta y = y_2 - y_1$ y $\Delta z = z_2 - z_1$. Por otro lado, en otro sistema inercial K' estos eventos vendran descritos por las coordenadas espacio-temporales (t'_1, x'_1, y'_1, z'_1) y (t'_2, x'_2, y'_2, z'_2) respectivamente, por lo que podemos definir una cantidad similar en términos de las coordenadas de K':

$$(\Delta s')^2 = -c^2 (\Delta t')^2 + (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2. \tag{2.20}$$

Supongamos por un momento que ambos eventos están separados por un intervalo espacio-temporal caracterizado por $\Delta s^2 = 0$. La ecuación $\Delta s^2 = 0$ corresponde ni mas ni menos que a una curva rectilínea en la cual una señal se propaga desde P_1 a P_2 a la velocidad de la luz. Sin embargo sabemos que la propagación de una señal a la velocidad de la luz es registrada en todos los sistemas de referencia con la misma velocidad (ya que corresponde a la velocidad universal máxima). Por lo tanto, si $\Delta s^2 = 0$ en K, necesariamente uno debe registrar $(\Delta s')^2 = 0$ en K'. En otras palabras $(\Delta s)^2 = 0$ y $(\Delta s')^2 = 0$ son equivalentes.

Preguntemonos ahora como están estos intervalos, escritos en distintos sistemas inerciales, relacionados para eventos P_1 y P_2 arbitrarios (es decir, no necesariamente conectados por señales). Para ello, consideremos primero el caso en que tales eventos están infinitesimalmente cerca el uno del otro. En tal caso nos permitimo escribir el intervalo espacio-temporal en forma infinitesimal

$$ds^2 = -c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2. \tag{2.21}$$

Claramente, si la separación de dos eventos es infinitesimal en K, también lo debe ser en K'. De modo que la única relación entre ds y ds' aceptable es una relación lineal de la forma:

$$ds = ads'. \tag{2.22}$$

Observen que ninguna otra cantidad infinitesimal puede entrar en esta relación, dado que para $ds' = 0$ sabemos que debemos invariablemente reobtener $ds = 0$. Más aún, el coeficiente a solo puede depender del valor absoluto de la velocidad relativa de ambos sistemas K y K'. En efecto, observen primero que a no puede depender ni de las coordenadas espaciales ni del tiempo, de otro modo distintos puntos en el tiempo y en el espacio no serían equivalentes. En forma similar, a tampoco puede depender de la dirección de la velocidad relativa, pues eso introduciría una anisotropía del espacio al momento de describir la relación entre ambos eventos[2]. Noten que en total analogía, pudimos haber escrito

$$ds' = ads, \tag{2.23}$$

donde a es precisamente la misma función. Por lo tanto podemos deducir que $a = \pm 1$. Notemos sin embargo que un caso particular corresponde a aquel en que $v = 0$, en cuyo caso debemos reobtener $ds = ds'$. Por dicho motivo, debemos concluir que $a = 1$ y en general:

$$ds = ds'. \tag{2.24}$$

Dado que hemos supuesto homogeneidad e isotropía del espacio-tiempo, este resultado puede ser extendido a intervalos finitos

$$\Delta s = \Delta s'. \tag{2.25}$$

[2]Resulta útil pensar en estas dos reglas para el caso ya conocido que consideramos en la sección 2.1. Ahí bien pudimos haber deducido que el intervalo espacial $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dy^2$ está relacionado al intervalo $ds'^2 = dx'^2 + dy'^2 + dy'^2$ mediante una relación lineal de la forma $ds = ads'$. En tal caso resulta natural entender por qué a no puede depender ni de las coordenadas ni de los ángulos de la matriz de rotación R, por exactamente las mismas razones

De esta forma, hemos llegado a un resultado crucial: El intervalo espacio-temporal Δs^2 caracterizando dos eventos arbitrarios es una cantidad invariante en todos los sistemas de referencia inerciales.