Cátedra IV: Transformaciones de Lorentz II

En esta clase continuaremos con el estudio de las transformaciones de Lorentz.

4.1 Algo más sobre adición de velocidades

Retomemos el último resultado de la clase anterior. Recordemos que dedujimos la regla de adición de velocidades asumiendo que la partícula en cuestión se movía a lo largo del mismo eje en el cual los observadores O y O' presentan un movimiento relativo. Supongamos ahora que la partícula tiene componentes perpendiculares al eje x. Es decir, la velocidad de la partícula corresponde a un vector $\vec{u}$ con componentes

$$u_x = \frac{dx}{dt}, \qquad u_y = \frac{dy}{dt}, \qquad u_z = \frac{dz}{dt}. \tag{4.1}$$

Las transformaciones de Lorentz nos dicen que los infinitesimales dt, dx, dy, dz asociados al movimiento de la partícula en el sistema de referencia K están relacionados con los infinitesimales dt', dx', dy', dz' en el sistema de referencia K' (utilizado por un observador O' en movimiento con respecto a O con velocidad v a lo largo del eje x) en la forma siguiente:

$$c\,dt = \gamma(c\,dt' + \beta dx'), \qquad dx = \gamma(dx' + \beta c\,dt'), \qquad dy = dy', \qquad dz = dz'. \tag{4.2}$$

Repitiendo el calculo hecho en la última sección de la clase anterior, pero ahora teniendo en cuenta las componentes a lo largo de los ejes y y z, obtenemos

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + vu'_x/c^2}, \qquad u_y = \frac{u'_y\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + vu'_x/c^2}, \qquad u_z = \frac{u'_z\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + vu'_x/c^2}. \tag{4.3}$$

Por otro lado, las relaciones inversas, corresponden a

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - vu_x/c^2}, \qquad u'_y = \frac{u_y\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - vu_x/c^2}, \qquad u'_z = \frac{u_z\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - vu_x/c^2}. \tag{4.4}$$

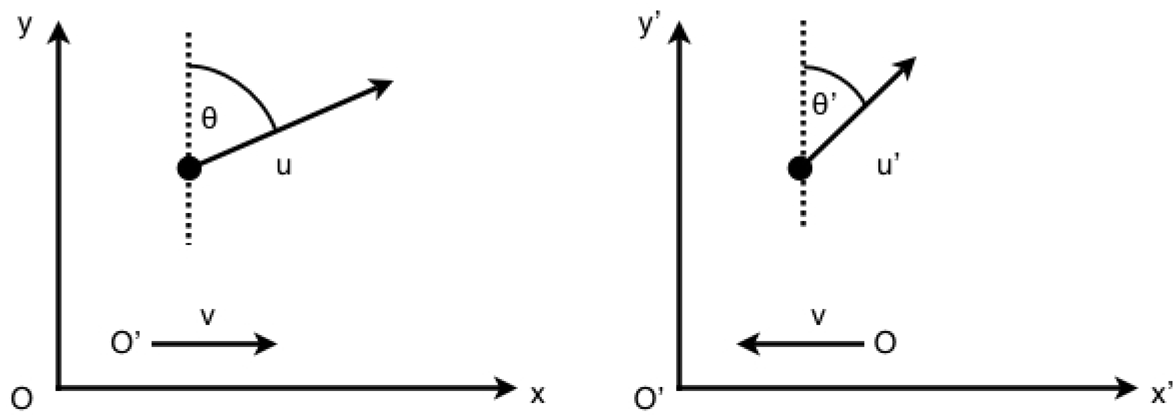
Es decir, las componentes transversales al movimiento relativo de ambos observadores, son registrados por ambos observadores en forma distinta en sus sistemas K y K' respectivos.

4.2 Aberración de la luz

Como aplicación del resultado anterior, analicemos una situación relevante para la astronomía. Supongamos primero que la partícula de nuestro ejemplo anterior tiene una velocidad $\vec{u}$ caracterizada solo por componentes a lo largo del plano $x - y$. Debido a las relaciones anteriores, sabemos que la partícula también se constatara moviendose en el plano $x' - y'$ por el observador O' pero con componentes distintas. En los dos sistemas de referencia K y K' podemos descomponer la velocidad de la partícula en sus componentes de la siguiente manera (ver figura siguiente)

$$u_x = u \cos\theta, \qquad u_y = u \sin\theta, \qquad u'_x = u' \cos\theta', \qquad u'_y = u' \sin\theta'. \tag{4.5}$$

Debería ser claro que en general $u' \neq u$ y $\theta' \neq \theta$ (esto también es cierto en mecánica Newtoniana, utilizando las transformaciones de Galileo). Utilizando las relaciones (4.3),



podemos entonces deducir

$$u \cos\theta = \frac{u' \cos\theta' + v}{1 + vu' \cos\theta'/c^2}, \qquad u \sin\theta = \frac{u' \sin\theta' \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + vu' \cos\theta'/c^2}. \tag{4.6}$$

Dividiendo ahora la segunda ecuación por la primera obtenemos entonces

$$\tan\theta = \frac{u' \sin\theta'}{u' \cos\theta' + v} \sqrt{1 - v^2/c^2}. \tag{4.7}$$

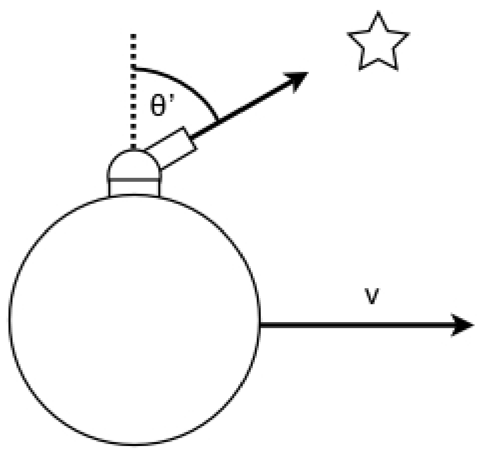
Esta es una relación interesante. Nos entrega el ángulo θ medido en K como función de la velocidad u' y el ángulo θ' medidos en K'. Noten que la única diferencia con el resultado deducido a través del uso de las transformaciones de Galileo es el factor $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ multiplicando el lado derecho. Como ya es habitual, si quisiéramos obtener la relación inversa, ahora entre el ángulo θ' medido en K' y u y el ángulo θ medidos en K, simplemente debemos invertir el rol de todas las cantidades y cambiar $v \to -v$:

$$\tan\theta' = \frac{u \sin\theta}{u \cos\theta - v} \sqrt{1 - v^2/c^2}. \tag{4.8}$$

El caso que nos interesa es aquel en que la partícula corresponde a un fotón (un *cuanto* de luz). En tal caso, dado que la velocidad de la luz es universal, debemos usar $u = u' = c$. Remplazando estas cantidades en la relación (4.8), obtenemos finalmente

$$\tan\theta' = \frac{\sin\theta}{\cos\theta - \beta}\sqrt{1-\beta^2}, \tag{4.9}$$

donde $\beta = v/c$. Esta es la ecuación relativista para la aberración de la luz. Pensemos ahora en una situación cotidiana. Supongamos que estamos interesados en observar una estrella determinada y para ello contamos con las coordenadas de la estrella utilizadas para la observación de la misma seis meses atrás. La ecuación anterior nos señala que debemos realizar una corrección al ángulo θ de nuestro telescopio con relación al eje en el cual la tierra se mueve (ver figura). Dado que la estrella se encuentra muy distante,



para cualquier efecto el movimiento de esta no es del todo relevante para este problema, por lo que lo importante es la velocidad relativa de la tierra con respecto a su velocidad seis meses atrás. Llamemos a esta cantidad v. Para calcular la corrección que debemos aplicara a nuestro telescopio para observar la estrella, constatemos primero que para $\beta = 0$ (es decir $v = 0$) tendremos $\theta' = \theta$. Esto quiere decir que para pequeñas velocidades $v \ll c$ tendremos pequeñas correcciones al ángulo modificando la relación $\theta' = \theta$. Definamos por lo tanto $\Delta\theta$ de la forma

$$\theta' = \theta + \Delta\theta. \tag{4.10}$$

Reemplazando esta expresión en la ecuación (4.9) y expandiendo ambos lados linealmente en $\Delta\theta$ y β (que son pequeñas), obtenemos

$$\tan\theta + \frac{\Delta\theta}{\cos^2\theta} + \mathcal{O}(\Delta\theta^2) = \tan\theta\left(1 + \frac{\beta}{\cos\theta}\right) + \mathcal{O}(\beta^2). \tag{4.11}$$

Luego, despreciando las cantidades cuadráticas, obtenemos

$$\Delta\theta \simeq \frac{v}{c}\sin\theta. \tag{4.12}$$

Esta ecuación nos entrega la corrección que debemos considerar para orientar un telescopio en el cielo. Vale mencionar que esta relación fue deducida antes de la llegada de relatividad especial, y fue utilizada para medir estimar la velocidad de la luz.

4.3 Más sobre las transformaciones de Lorentz

Continuemos discutiendo las transformaciones de Lorentz. Para ello resulta conveniente introducir una notación que persistirá a lo largo de este curso. En lugar de continuar utilizando las coordenadas t, x, y y z, introduzcamos nuevas coordenadas x^0, x^1, x^2 y x^3 definidas como

$$x^0 \equiv ct, \tag{4.13}$$

$$x^1 \equiv x, \tag{4.14}$$

$$x^2 \equiv y, \tag{4.15}$$

$$x^3 \equiv z. \tag{4.16}$$

Es conveniente referirnos colectivamente a cualquiera de estas coordenadas simplemente escribiendo x^μ, con $\mu = 0, 1, 2, 3$. Es decir, usando un superíndice griego. También es conveniente usar la notación x^i, con $i = 1, 2, 3$, para las coordenadas puramente espaciales x^1, x^2 y x^3. Es decir, usando un superíndice latino. Noten que hemos introducido superíndices y no subíndices. Esto es claramente convencional. Sin embargo, y como veremos más adelante, una vez adoptada tal convención, resultará imprescindible continuar con ella.

Volveremos a esta notación más adelante. Por ahora continuaremos estudiando situaciones simples donde usemos solo dos coordenadas x^0 y x^1 (antiguamente t y x respectivamente). Observen que ahora las transformaciones de Lorentz pueden ser escritas de la forma

$$\Delta x^0 = \gamma(\Delta x^{0'} + \beta \Delta x^{1'}) \tag{4.17}$$

$$\Delta x^1 = \gamma(\Delta x^{1'} + \beta \Delta x^{0'}). \tag{4.18}$$

Noten que hemos puesto la prima ($'$) sobre el índice y no sobre x. Dada que las transformaciones de Lorentz cooresponden a una relación lineal entre las diferencias de coordenadas Δx^μ y $\Delta x^{\mu'}$, las expresiones anteriores pueden ser reexpresadas de la forma

$$\begin{pmatrix} \Delta x^0 \\ \Delta x^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x^{0'} \\ \Delta x^{1'} \end{pmatrix}. \tag{4.19}$$

Noten que la inversa de la matriz usada en la última expresión es precisamente la misma matriz pero con $\beta \to -\beta$. En otras palabras, las relaciones inversas vienen dadas por

$$\begin{pmatrix} \Delta x^{0'} \\ \Delta x^{1'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x^{0} \\ \Delta x^{1} \end{pmatrix}. \tag{4.20}$$

Noten que estas matrices dependen únicamente de un parámetro, es decir β. De hecho resulta conveniente parametrizar estas matrices introduciendo el siguiente parámetro θ (no confundir con el ángulo usado en la Sección anterior)

$$\tanh\theta = \beta = \frac{v}{c}. \tag{4.21}$$

Dado que $-c < v < c$, tenemos entonces $-1 < \beta < 1$, y por lo tanto la relación anterior corresponde a un mapa de uno a uno entre v y $\theta \in \mathbb{R}$. Observen adicionalmente que, dada la definición anterior, podemos escribir:

$$\gamma = \cosh\theta, \qquad \gamma\beta = \sinh\theta. \tag{4.22}$$

La transformación (4.19) puede ahora ser escrita de la siguiente forma

$$\begin{pmatrix} \Delta x^{0} \\ \Delta x^{1} \end{pmatrix} = \Lambda(\theta) \begin{pmatrix} \Delta x^{0'} \\ \Delta x^{1'} \end{pmatrix}, \qquad \text{donde} \qquad \Lambda(\theta) \equiv \begin{pmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta \\ \sinh\theta & \cosh\theta \end{pmatrix}, \tag{4.23}$$

mientras que la transformación inversa (4.20) puede ser escrita como

$$\begin{pmatrix} \Delta x^{0'} \\ \Delta x^{1'} \end{pmatrix} = \Lambda^{-1}(\theta) \begin{pmatrix} \Delta x^{0} \\ \Delta x^{1} \end{pmatrix}, \qquad \text{donde} \qquad \Lambda^{-1}(\theta) \equiv \begin{pmatrix} \cosh\theta & -\sinh\theta \\ -\sinh\theta & \cosh\theta \end{pmatrix}. \tag{4.24}$$

En la expresión anterior Λ^{-1} corresponde a la inversa de Λ. Es decir $\Lambda^{-1}\Lambda = \Lambda\Lambda^{-1} = 1$. Noten que la matriz $\Lambda(\theta)$ satisface varias propiedades interesantes. Primero que nada $\Lambda^{-1}(\theta) = \Lambda(-\theta)$. Más aún, en general, para dos valores θ_1 y θ_2 arbitrarios, las matrices $\Lambda(\theta_1)$ y $\Lambda(\theta_2)$ satisfacen (verifiquen esto):

$$\Lambda(\theta_1)\Lambda(\theta_2) = \Lambda(\theta_1 + \theta_2). \tag{4.25}$$

Este último resultado es de hecho muy sugerente: Dos transformaciones de Lorentz aplicadas sucesivamente, caracterizadas por parámetros θ_1 y θ_2 respectivamente, corresponde a una sola transformación de Lorentz caracterizada por un parámetro $\theta_1 + \theta_2$. Analicemos esto en más detalle. Supongamos tres observadores O, O' y O'' utilizando, como es habitual, sistemas de referencia K, K' y K'' para registrar eventos. Supongamos que la velocidad de O' con respecto a O es v, a lo largo del eje x, y que la velocidad de O'' con respecto a O' es u, también a lo largo del eje x. Dada la presente situación, sabemos bien que existen transformaciones de Lorentz relacionando intervalos en el espacio-tiempo registrados K, y K' por O y O' respectivamente. Estas son:

$$\begin{pmatrix} \Delta x^0 \\ \Delta x^1 \end{pmatrix} = \Lambda(\theta_1) \begin{pmatrix} \Delta x^{0'} \\ \Delta x^{1'} \end{pmatrix}, \qquad \text{donde} \qquad \theta_1 \equiv \text{arctanh}(v/c). \tag{4.26}$$

Por otro lado, existen transformaciones de Lorentz relacionando intervalos en el espacio-tiempo registrados K', y K'' por O' y O'' respectivamente. Estas son:

$$\begin{pmatrix} \Delta x^{0'} \\ \Delta x^{1'} \end{pmatrix} = \Lambda(\theta_2) \begin{pmatrix} \Delta x^{0''} \\ \Delta x^{1''} \end{pmatrix}, \qquad \text{donde} \qquad \theta_2 \equiv \text{arctanh}(u/c). \tag{4.27}$$

Juntando ambas ecuaciones podemos pues deducir

$$\begin{pmatrix} \Delta x^0 \\ \Delta x^1 \end{pmatrix} = \Lambda(\theta_1)\Lambda(\theta_2) \begin{pmatrix} \Delta x^{0''} \\ \Delta x^{1''} \end{pmatrix} = \Lambda(\theta_1 + \theta_2) \begin{pmatrix} \Delta x^{0''} \\ \Delta x^{1''} \end{pmatrix}. \tag{4.28}$$

Por lo tanto, $\Lambda(\theta_1+\theta_2)$ corresponde a la transformación de Lorentz relacionando intervalos en el espacio-tiempo registrados K, y K''. Noten que, por definición, el parámetro $\beta = u''/c$ asociando a esta transformación satisface $\beta = \tanh(\theta_1 + \theta_2)$. De hecho, es posible constatar la siguiente relación trigonométrica

$$\tanh(\theta_1 + \theta_2) = \frac{\tanh\theta_1 + \tanh\theta_2}{1 + \tanh\theta_1 \tanh\theta_2}. \tag{4.29}$$

De este modo, al hacer los reemplazos $\tanh\theta_1 = v/c$, $\tanh\theta_2 = u/c$ y $\tanh(\theta_1+\theta_2) = u''/c$, obtenemos

$$u'' = \frac{u + v}{1 + vu/c^2}, \tag{4.30}$$

que es precisamente la regla de adición de velocidades obtenida en la clase anterior.