Cátedra VI: Notación covariante y 4-velocidad

Ya estamos en condiciones de comenzar a estudiar la estructura del espacio-tiempo en forma más profunda. En esta clase introduciremos el concepto de 4-vector e iniciaremos así el estudio del concepto más amplio encapsulado por los tensores. A partir de ahora adoptaremos el sistema de unidades en donde $c = 1$ (ver problema 1 de la segunda tarea).

6.1 Transformaciones de Lorentz en notación covariante

Recordemos que hemos introducido la notación $x^\mu = (x^0, x^i)$ donde $x^0 = t$ $(c = 1)$ corresponde a la coordenada temporal y x^i (con $i = 1, 2, 3$) representa a las tres coordenadas espaciales de un sistema de referencia inercial K dado. En términos de estas coordenadas, el intervalo espacio-temporal puede ser escrito de la forma:

$$\Delta s^2 = -(\Delta x^0)^2 + \sum_i (\Delta x^i)^2. \tag{6.1}$$

Dado que una transformación de Lorentz mezcla los ejes temporales con los ejes espaciales (mediante una transformación lineal) de dos sistemas de referencia inerciales, es preciso introducir una notación en la cual no haya una distinción tan explícita entre la coordenada temporal y las coordenadas espaciales. Para ello consideremos la siguiente matriz:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{pmatrix}. \tag{6.2}$$

Es decir, una matriz η cuyas componentes son $\eta_{00} = -1$, $\eta_{0i} = \eta_{i0} = 0$ y $\eta_{ij} = \delta_{ij}$ donde δ_{ij} es la delta de Kronecker. Con la ayuda de esta matriz podemos escribir

$$\Delta s^2 = \sum_{\mu,\nu=0}^{3} \eta_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu. \tag{6.3}$$

La expresión anterior puede de hecho ser escrita en una forma aún más sucinta al omitir la sumatoria:

$$\Delta s^2 = \eta_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu. \tag{6.4}$$

En esta última expresión estamos usando la llamada convención de Einstein para la suma de índices. Esta convención nos permite omitir el símbolo de sumatoria $\sum$ cada vez que estén siendo multiplicadas dos cantidades, una con un indice griego arriba (superíndice) y la otra con el mismo indice griego abajo (subíndice). Algunos ejemplos de esta regla son:

$$V^\mu U_\mu = \sum_{\mu=0}^{3} V^\mu U_\mu, \qquad M^{\nu\mu} U_\mu = \sum_{\mu=0}^{3} M^{\nu\mu} U_\mu, \qquad M^{\nu\mu} V_\nu U_\mu = \sum_{\mu,\nu=0}^{3} M^{\nu\mu} V_\nu U_\mu. \tag{6.5}$$

La matriz $\eta_{\mu\nu}$ tiene un rol central en el estudio de la relatividad especial. Se denomina métrica, y nos permite realizar productos entre vectores y tensores. Más adelante estudiaremos en algún detalle su significado geométrico y su utilidad. Por ahora, simplemente será un símbolo que simplifica bastante la notación del intervalo espacio-temporal Δs^2. Dado que Δs^2 es un invariante bajo transformaciones de Lorentz, también podemos escribir

$$\Delta s^2 = \eta_{\mu'\nu'} \Delta x^{\mu'} \Delta x^{\nu'}, \tag{6.6}$$

donde $x^{\mu'}$ son las coordenadas usadas para describir otro sistema de referencia inercial K'. Noten que las componentes de la métrica $\eta_{\mu'\nu'}$ no cambian de un sistema a otro. Es decir

$$\eta_{\mu'\nu'} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{pmatrix}. \tag{6.7}$$

También es posible expresar una transformación de Lorentz explotando la convención anterior. Dado que una transformación de Lorentz corresponde a una transformación lineal relacionando diferencias de coordenadas Δx^μ y $\Delta x^{\mu'}$ de dos sistemas inerciales K y K', podemos escribir

$$\Delta x^\mu = \Lambda^\mu{}_{\nu'} \Delta x^{\nu'}, \tag{6.8}$$

donde x^μ y $x^{\mu'}$ corresponden a las coordenadas usadas en K y K'. Dado que la relación inversa también corresponde a una transformación de Lorentz, ésta deberá ser expresada en forma análoga:

$$\Delta x^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}{}_{\nu} \Delta x^{\nu}. \tag{6.9}$$

Noten que la única diferencia entre ambas expresiones es la posición de la prima $'$ en los indices. Combinando ambas relaciones podemos escribir:

$$\Delta x^\mu = \Lambda^\mu{}_{\nu'} \Lambda^{\nu'}{}_{\rho} \Delta x^{\rho}. \tag{6.10}$$

Dado que esta relación es valida para toda diferencia Δx^μ caracterizando pares de eventos, podemos concluir que en general:

$$\Lambda^\mu{}_{\nu'} \Lambda^{\nu'}{}_{\rho} = \delta^\mu_\rho, \tag{6.11}$$

donde δ^μ_ρ es la delta de Kronecker en su versión 4-dimensional. Es decir, $\delta^\mu_\rho = 1$ si $\mu = \nu$ y $\delta^\mu_\rho = 0$ si $\mu \neq \nu$. De igual forma podemos deducir:

$$\Lambda^{\mu'}{}_{\nu} \Lambda^{\nu}{}_{\rho'} = \delta^{\mu'}_{\rho'}. \tag{6.12}$$

Por otro lado, insertando la relación (6.9) en la ecuación (6.4) y recordando que Δs^2 es un invariante, podemos escribir

$$\eta_{\mu\nu}\Delta x^{\mu}\Delta x^{\nu} = \eta_{\mu'\nu'}\Lambda^{\mu'}{}_{\mu}\Lambda^{\nu'}{}_{\nu}\Delta x^{\mu}\Delta x^{\nu}. \tag{6.13}$$

Usando nuevamente el hecho que esta relación es valida para todo par de eventos caracterizados por la diferencia Δx^{μ}, encontramos la expresión general:

$$\eta_{\mu\nu} = \eta_{\mu'\nu'}\Lambda^{\mu'}{}_{\mu}\Lambda^{\nu'}{}_{\nu}. \tag{6.14}$$

Más aún, utilizando la relación inversa (6.12), podemos llegar a la expresión análoga:

$$\eta_{\mu'\nu'} = \eta_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}{}_{\mu'}\Lambda^{\nu}{}_{\nu'}. \tag{6.15}$$

Las relaciones anteriores son todas ejemplos de relaciones que hemos usado frecuentemente en el curso hasta ahora, pero explotando la convención de suma de índices de Einstein. Esta nueva notación es frecuentemente denominada *notación covariante*. El significado preciso de esta nomenclatura lo entenderemos más tarde.

Al principio, las expresiones en notación covariante pueden parecen ser sumamente abstractas, pero simplemente hacen referencia a operaciones cotidianas, tales como transformaciones lineales. Por ejemplo, en el caso particular en que K' fuese un sistema inercial de un observador en movimiento con velocidad $\beta = v$ (recuerden que ahora $c = 1$) en la dirección del eje x^1 con respecto a un observador en reposo en el sistema inercial K (nuestro ejemplo de costumbre), entonces $\Lambda^{\mu}{}_{\nu'}$ adquiriría la forma

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu'} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{6.16}$$

donde $\gamma = \sqrt{1-\beta^2}$, mientras que la transformación inversa vendría caracterizada por

$$\Lambda^{\mu'}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{6.17}$$

Por otro lado, no olvidemos que una rotación también es una transformación lineal que deja invariante al intervalo espacio temporal Δs^2. Por ejemplo, dos sistemas de coordenadas x^{μ} y $x^{\mu'}$ relacionadas por una rotación en un ángulo θ en torno al eje x^3 vendrán caracterizadas por una matriz $\Lambda^{\mu}{}_{\nu'}$ con componentes

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{6.18}$$

mientras que la transformación inversa estaría caracterizada por

$$\Lambda^{\mu'}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{6.19}$$

Para concluir esta discusión, mencionemos que hoy en día es común denominar transformación de Lorentz a toda transformación lineal de las diferencias de coordenadas Δx^{μ} dejando invariante al intervalo espacio temporal $\Delta s^2 = \eta_{\mu\nu}\Delta x^{\mu}\Delta x^{\nu}$, incluyendo rotaciones. En dicho contexto, a las transformaciones del tipo (6.16) y (6.17) se les denomina boosts, para distinguirlas de las rotaciones. Más adelante deduciremos la forma más general de una transformación de Lorentz (incluyendo boosts y rotaciones), algo que tenemos pendiente.

6.2 La 4-velocidad

Como ya es habitual, en el caso en que dos eventos estén infinitesimalmente cerca, éstos pueden ser descritos por diferenciales de coordenadas dx^{μ}, y por lo tanto podemos escribir:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}. \tag{6.20}$$

Por su parte, una transformación de Lorentz y su inversa, relacionando dos diferenciales dx^{μ} y $dx^{\mu'}$ escritos en distintos sistemas de referencia inerciales K y K' respectivamente, pueden ser expresadas de la forma:

$$dx^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu'} dx^{\nu'}, \qquad dx^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}{}_{\nu} dx^{\nu}. \tag{6.21}$$

Consideremos ahora la trayectoria de una partícula física (una partícula real), moviéndose a través del espacio-tiempo. Resulta muy conveniente parametrizar a dicha trayectoria mediante el uso del tiempo propio de la partícula τ. Recordemos que el tiempo propio viene definido por la relación

$$d\tau = \sqrt{-ds^2} = \sqrt{-\eta_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}}. \tag{6.22}$$

El resultado, es una curva $\gamma = \gamma(\tau)$ con parámetro[1] τ, cuya ubicación viene descrita por las coordenadas

$$x^{\mu} = x^{\mu}(\tau). \tag{6.23}$$

La razón por la cual hemos de elegir al tiempo propio τ para describir la trayectoria de esta partícula es que el tiempo propio es en esencia el parámetro afín de dicha curva, es decir, el parámetro cuya longitud calza con la longitud del intervalo espacio temporal de dos eventos sucesivos en la curva (ver figura 1). Es importante precisar, sin embargo,

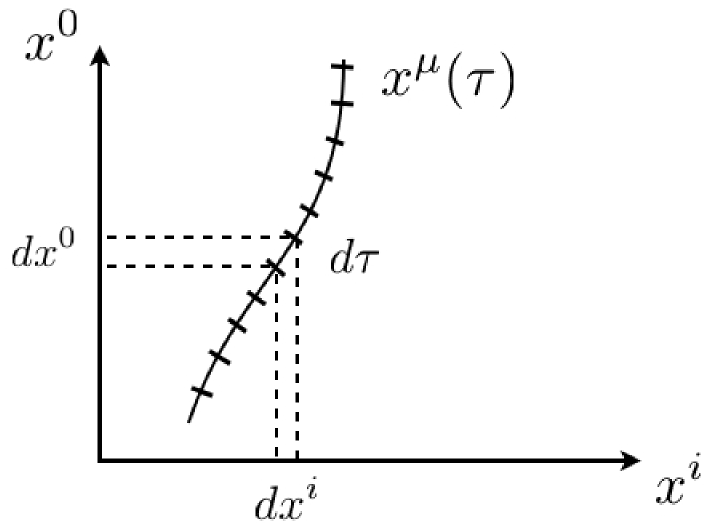

Figure 1: Curva describiendo la trayectoria de una partícula física.

que bien pudimos haber elegido otro parámetro, tal como el tiempo t medido por relojes en reposo con respecto a K. Más aún, recordemos que $d\tau = d\tau'$ es un invariante bajo transformaciones de Lorentz:

$$d\tau = \sqrt{-\eta_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}} = \sqrt{-\eta_{\mu'\nu'} dx^{\mu'} dx^{\nu'}} = d\tau'. \tag{6.24}$$

Consideremos ahora el vector tangente a la curva. Sin ser muy rigurosos en su definición (lo seremos en las siguientes clases), éste puede ser definido como aquel vector con componentes:

$$u^{\mu} = \frac{dx^{\mu}(\tau)}{d\tau}. \tag{6.25}$$

[1]Recuerden que toda curva debe venir acompañada de un parámetro, y que dos curvas con el mismo conjunto de eventos, pero parametrizadas por parámetros distintos, son curvas distintas.

Observen que a lo largo de la curva tenemos

$$d\tau = \sqrt{-\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu} = dt\sqrt{-\eta_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\nu}{dt}} = dt\sqrt{1-v^2}, \qquad \text{donde} \qquad v^2 \equiv \sum_i (v^i)^2. \tag{6.26}$$

En la expresión anterior hemos usado $dx^0/dt = 1$ (dado que $x^0 = t$) y $v^i = dx^i/dt$. Noten que los v^i's corresponden precisamente a las componentes de la velocidad de la partícula medida en el sistema K. Por lo tanto, vemos que las componentes espaciales i del vector u satisfacen:

$$u^i = \frac{dx^i(\tau)}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\frac{dx^i}{dt} = \frac{v^i}{\sqrt{1-v^2}} = \gamma v^i. \tag{6.27}$$

De este modo, hemos deducido que, en términos de la velocidad de la partícula v^i medida en K, el vector tangente tiene componentes:

$$u^\mu = (\gamma, \gamma v^i) = (\gamma, \gamma\beta^i). \tag{6.28}$$

A este vector se le denomina 4-velocidad. Desde el punto de vista del espacio-tiempo 4-dimensional, es precisamente la velocidad de la partícula. Recordemos que en geometría Euclidiana, al usar un parámetro afín para describir una curva, el vector tangente de la curva es unitario. En el caso de la geometría Minkowskiana pasa exactamente lo mismo. Para apreciar esto, notemos que:

$$u \cdot u \equiv \eta_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = -(u^0)^2 + \sum_i (u^i)^2 = -\gamma^2(1-\beta^2) = -1. \tag{6.29}$$

Como mencionamos anteriormente, para calcular productos de vectores debemos utilizar la métrica. Esto aún no lo hemos demostrado, pero en este ejemplo la idea de por qué la métrica es el objeto que permite tal operación queda algo clara. Por otro lado, noten que el vector u^μ al cuadrado $u \cdot u = -1$ ha dado como resultado un número negativo. Esto es parte de la esencia de la geometría Minkowskiana, y exploraremos su significado durante las siguientes clases. Observen que el resultado $u \cdot u = -1$ es independiente del parámetro τ. Este resultado ha sido obtenido por construcción, y se desencadena del hecho que hemos elegido como parámetro al tiempo propio de la partícula describiendo la trayectoria.

Es importante no confundirse con los significados de los objetos apareciendo en las componentes de u^μ. Las componentes espaciales u^i de la 4-velocidad NO corresponden a la velocidad de la partícula v^i medida en K, dado que hay un factor γ enfrente. Por otro lado, la importancia de contar con u^μ es que su forma de transformar desde un sistema de referencia a otro es extraordinariamente sencilla de expresar en términos de nuestra nueva notación. Dado que $d\tau$ es un invariante bajo transformaciones, al usar las relaciones

(6.21) podemos escribir

$$u^{\mu'} = \frac{dx^{\mu'}}{d\tau'} = \frac{\Lambda^{\mu'}{}_{\nu} dx^{\nu}}{d\tau} = \Lambda^{\mu'}{}_{\nu} \frac{dx^{\nu}}{d\tau} = \Lambda^{\mu'}{}_{\nu} u^{\nu}, \tag{6.30}$$

donde usamos $d\tau = d\tau'$. En otras palabras, encontramos que

$$u^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}{}_{\nu} u^{\nu}, \qquad u^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu'} u^{\nu'}. \tag{6.31}$$

Estas relaciones expresan cómo transforma la 4-velocidad bajo transformaciones de Lorentz. Como veremos, la 4-velocidad es un ejemplo particular de un 4-vector, cuya propiedad más significativa es el hecho de que es un objeto cuyas componentes transforman de la forma (6.31).