

# **FISICA MODERNA**

Nelson Zamorano H.

Departamento de Física

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

Universidad de Chile

versión 17 de abril de 2007



# Índice general

<b>V. RELATIVIDAD ESPECIAL: DINÁMICA</b>	<b>3</b>
V.1. Dinámica Relativista. . . . .	3
V.1.1. Ley de Transformaciones de Vectores. . . . .	3
V.1.2. La Cuadrivelocidad. . . . .	7
V.1.3. El cuadrimomentum . . . . .	11
V.1.4. La Conservación del Momentum. . . . .	12
V.2. El Fotón . . . . .	23
V.2.1. Principio Variacional. . . . .	29
V.3. Ecuaciones de Maxwell . . . . .	30
V.3.1. Transformación de un elemento de 4-Volumen . . . . .	31
V.3.2. Las Ecuaciones de Maxwell . . . . .	32
V.4. Confirmación experimental de la relatividad especial . . . . .	35
V.4.1. Resumen . . . . .	40
V.5. Ejercicios Propuestos . . . . .	41



# Capítulo V

## RELATIVIDAD ESPECIAL: DINÁMICA

### V.1. Dinámica Relativista.

En esta sección definiremos la velocidad en 4 dimensiones y a partir de ella el momentum. Justificaremos la interpretación de la expresión obtenida para el 4-momentum recurriendo a argumentos físicos y al Principio Variacional.

De forma análoga a la cuadri-velocidad definiremos la cuadri-aceleración y con ella la segunda Ley de Newton. Esto nos lleva a la dinámica de una partícula. La principal aplicación de este método son los choques elásticos y las leyes de conservación. Una consecuencia es que la masa deja de ser una cantidad conservada en relatividad especial. Esto marca una diferencia con lo que acontece en el esquema de Newton.

Introduciremos el concepto de invariante, una cantidad que toma el mismo valor en cualquier sistema de referencia inercial. A partir del invariante asociado al momentum emergerá la fórmula emblemática de la relatividad especial de Einstein:  $E = m c^2$ .

La mecánica de Newton es correcta para movimientos a bajas velocidades comparadas con la velocidad de la luz. De esta forma las expresiones relativistas deben tener como caso límite la forma newtoniana.

#### V.1.1. Ley de Transformaciones de Vectores.

Las cantidades físicas, transforman de acuerdo a su naturaleza al ir de un sistema de referencia inercial a otro. Por ejemplo, la fuerza, la velocidad...etc. cambian de la misma forma,

un escalar como la temperatura no altera su valor pero cambia su dependencia funcional en las coordenadas:  $T(x,y,z,t)=T'(x',y',z',t')$ .

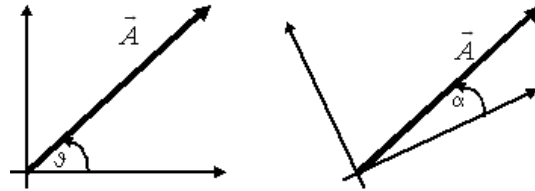


Figura V.1: *En mecánica utilizamos cantidades como: escalares, vectores, tensores...etc. El nombre de cada uno de estos objetos responde a las forma cómo transforma bajo una rotación del sistema de referencia.*

Por ejemplo, la segunda ley de Newton  $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$  es válida en un sistema inercial y no se especifica, por ejemplo, la orientación que debe adoptar el sistema de referencia en el espacio. Nosotros seleccionamos un sistema de referencia, el más conveniente, y escribimos las ecuaciones en él. Si posteriormente queremos cambiar a otro sistema de referencia, uno que forme un cierto ángulo con respecto a un eje del anterior, debemos usar las propiedades de transformación de los vectores, la indicada en la Figura V.1. Como vectores se igualan con vectores, ambos miembros de la ecuación transforman de la misma forma y la nueva ecuación contiene la misma información que la primitiva.

Todos los objetos que obedecen la ley de transformación para los vectores se denominan (obvio) **vectores**. las ecuaciones físicas entonces igualan vectores con vectores, pseudo-vectores con pseudo-vectores, tensores con sus similares....

### Ejemplo

Estudiemos el caso de una rotación en un ángulo  $\theta$  alrededor del eje  $z$ . Para ilustrar cómo operan las transformaciones de Lorentz, incluiremos aquí el tiempo.

- a) Escribir la rotación en forma matricial, incluyendo el tiempo.

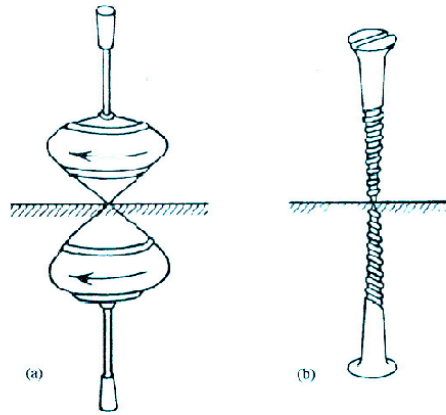


Figura V.2: Dos ejemplos de pseudovectores: el momento angular de un trompo y el giro de un tornillo, ambos sobre un espejo. El sentido de giro de ambos objetos, el real y su imagen, es el mismo. Ésa es la característica de los pseudovectores. El momento angular es un pseudovector. En general el producto vectorial de dos vectores es un pseudovector. Como se señaló en la figura anterior, pseudovectores se igualan con pseudovectores, ambos lados de la ecuación deben tener la misma ley de transformación.

$$\begin{bmatrix} \bar{ct} \\ \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ct, \\ x \cos \theta + y \operatorname{sen} \theta, \\ y \cos \theta - x \operatorname{sen} \theta, \\ z \end{bmatrix}$$

Estas ecuaciones se pueden escribir en forma tensorial,

$$\bar{x}^\mu = \sum_{\nu=0}^{\nu=3} R^\mu{}_\nu x^\nu. \quad (\text{V.1})$$

Hemos introducido la matriz de rotación  $R^\mu{}_\nu$ . Esta matriz incluye la componente temporal, los índices  $\mu$  y  $\nu$  toman los valores 0, 1, 2 y 3. Es una matriz de  $4 \times 4$ .

### Convención de Einstein

A continuación se define la convención de Einstein para las sumas. Consiste en omitir el símbolo de la sumatoria  $\sum$  y adoptar la convención siguiente: cada vez que aparezca un índice

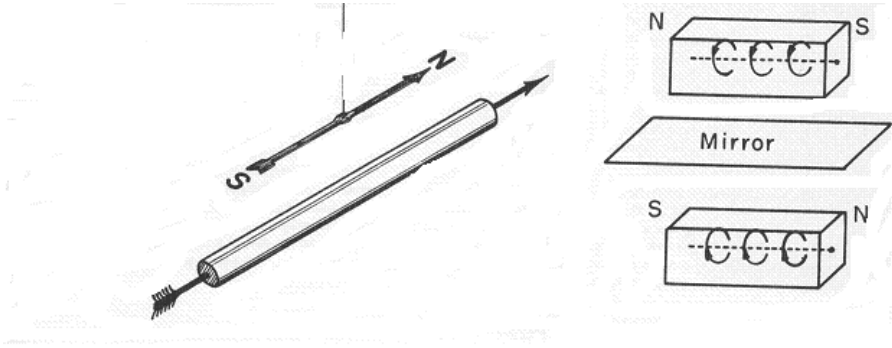


Figura V.3: Ernest Mach, uno de los inspiradores de A. Einstein, cuando niño, no podía comprender por qué una aguja magnética se inclinaba en un sentido específico al ponerse, como en la figura sobre un alambre que conducía una corriente en una determinada dirección. La corriente, el alambre, la aguja magnética...estaban todos en un mismo plano y, para Mach, la aguja magnética, por simetría, no debería tener preferencia por ninguno de las dos direcciones. Sin embargo, siempre lo hace en un sentido bien determinado. Lo que el infante Mach no sabía, es que la simetría era sólo aparente. Un magneto es un magneto porque los electrones giran en la dirección indicada en la figura. este movimiento quiebra la simetría. (ver referencia de N-CH. Yang, pág. 62.)

repetido, se debe sumar sobre todos los valores que toma dicho índice. En esta notación la expresión anterior se escribe

$$\bar{x}^\mu = R^\mu_\nu x^\nu. \quad (\text{V.2})$$

donde la matriz  $R^\mu_\nu$  tiene la siguiente forma

$$R^\mu_\nu = \begin{bmatrix} R^0_0 & R^0_1 & R^0_2 & R^0_3 \\ R^1_0 & R^1_1 & R^1_2 & R^1_3 \\ R^2_0 & R^2_1 & R^2_2 & R^2_3 \\ R^3_0 & R^3_1 & R^3_2 & R^3_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \text{sen } \theta & 0 \\ 0 & -\text{sen } \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{ct} \\ \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \text{sen } \theta & 0 \\ 0 & -\text{sen } \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Las velocidades deben transformar de la misma forma. Usando la forma tensorial definida en [V.1.1], y diferenciando con respecto a  $x^\nu$  (y manteniendo fijo el ángulo de rotación) tenemos que

$$\Delta \bar{x} \equiv \bar{X}_p - \bar{X}_q, \quad d\bar{x}^\mu = R^\mu_\nu dx^\nu, \quad (\text{V.3})$$



de aquí podemos encontrar la forma de la velocidad recordando que  $t$  toma el mismo valor en todos los sistemas de referencia. Sólo debemos dividir ambos miembros de la ecuación anterior por  $dt$ :

$$\frac{d\bar{x}^\mu}{dt} = R^\mu_\nu \frac{dx^\nu}{dt}, \quad \bar{V}^\mu = R^\mu_\nu V^\nu. \quad (\text{V.4})$$

Es claro que esta expresión transforma igual que los vectores bajo una rotación, y por lo tanto es un vector.

Podemos seguir con este método y aplicarlo a la aceleración, y obtener un resultado similar: también es un vector.

### V.1.2. La Cuadrivelocidad.

Lo que nos interesa ahora es aplicar este método a la velocidad en relatividad especial. Las transformaciones de interés, en este caso, son las transformaciones de Lorentz. Para que un objeto de 4 componentes sea cuadrivector, debe transformar igual que las coordenadas  $x^\mu$  al efectuar un cambio de sistema de referencia, puesto que nos interesa que las leyes físicas tengan la misma forma en todos los sistemas inerciales. Esto es lo que se denomina covariante.

Al intentar resolver un problema específico, seleccionamos el sistema de referencia que juzgamos más adecuado, y sabemos que las leyes tienen la misma expresión formal en ese sistema como en cualquier otro inercial.

Si queremos cambiar de sistema de referencia, usamos las transformaciones de Lorentz, puesto que todas las cantidades usadas deben ser cuadrivectores y por lo tanto obedecen la misma ley de transformación.

Entonces:

$$d\bar{x}^\mu = \Lambda^\mu_\nu dx^\nu, \quad (\text{V.5})$$

donde  $\Lambda$  es la matriz que representa a la transformación de Lorentz.

$$\begin{bmatrix} d\bar{ct} \\ d\bar{x} \\ d\bar{y} \\ d\bar{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d ct \\ dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix}$$

¿Cómo definimos la cuadrivelocidad? Si ya sabemos que  $\Delta x^\mu$  transforma como un cuadrivector, tal como en la definición anterior, entonces para definir la cuadrivelocidad debemos dividir esta cantidad por un *invariante*: una cantidad que tenga el mismo valor en ambos sistemas de referencia inerciales, en analogía con lo realizado en la mecánica Newtoniana.

Ya conocemos una cantidad, que cumple con esta propiedad: precisamente el elemento de longitud en 4 dimensiones.

$$ds^2 = c^2 (dt)^2 - d\vec{x}^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu.$$

donde  $\eta_{\mu\nu}$  es la métrica de Minkowski, definida junto con la transformación de Lorentz en una dimensión espacial:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \Lambda^\mu{}_\nu = \begin{bmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{bmatrix}$$

Como  $ds' = ds$ , podemos dividir ambos lados de la ecuación y obtener la cuadrivelocidad:

$$u^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{ds}. \quad (\text{V.6})$$

Las propiedades de transformación de  $u^\mu$  son las esperadas

$$\bar{u}^\mu \equiv \frac{d\bar{x}^\mu}{ds} = \Lambda^\mu{}_\nu \frac{dx^\nu}{ds} = \Lambda^\mu{}_\nu u^\nu. \quad (\text{V.7})$$

Si una partícula permanece en reposo en el sistema de referencia que estamos usando entonces  $d\vec{x} = 0$ . y  $u^\mu$  toma la siguiente forma (escrita en forma horizontal para ahorrar espacio)

$$u^\mu = \left[ \frac{cdt}{cdt}, 0, 0, 0 \right] = [1, 0, 0, 0].$$

Ahora, si la partícula se desplaza en el sistema de referencia que estamos usando, entonces podemos factorizar el tiempo a partir de la expresión de  $ds^2$ , para que la cuadrivelocidad se asemeje lo más posible a la expresión usual de la velocidad.

$$ds^2 = c^2 (dt)^2 [1 - [dx/(cdt)]^2], \quad (\text{V.8})$$

pero  $dx/dt$  es la velocidad de la partícula con respecto al sistema de referencia elegido en la dirección  $x$ . Análogamente con el resto de las coordenadas, de forma que la expresión anterior se transforma en:

$$ds^2 = c^2 (dt)^2 [1 - \vec{v}^2/c^2], \quad (\text{V.9})$$

donde  $\vec{v}$  es la velocidad de la partícula. Tomando la componente positiva de la raíz cuadrada de esta expresión y recordando la definición de  $\beta$  y  $\gamma$  podemos escribir la cuadrivelocidad de la siguiente forma:

$$u^\mu = [\gamma, \vec{\beta}\gamma]. \quad (\text{V.10})$$

Note que la expresión obtenida no tiene dimensiones.

### Receta para subir y bajar índices

Los índices superiores identifican a un vector  $u^\mu$  (o tensor si hay más de un índice  $F^{\mu\nu}$ ) *contravariante*. Si figura como subíndice  $u_\mu$ , se denomina *covariante*.

Cada una de estas cantidades tiene un significado geométrico bien determinado pero aquí sólo nos interesa dar una receta que nos indique cómo subir o bajar índices.

Primero debemos definir la matriz inversa de la métrica de Minkowski:

$$\eta^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

como se puede apreciar tiene exactamente la misma expresión de la métrica de Minkowski.

Para subir un índice, es decir transformarlo de covariante en contravariante basta multiplicar por la métrica inversa de Minkowski:

$$u^\mu = \eta^{\mu\alpha} u_\alpha, \text{ análogamente } u_\mu = \eta_{\mu\alpha} u^\alpha.$$

La métrica de Minkowski (o su inversa) se utiliza para bajar (o subir) índices.

### Ejemplo

Encuentre la expresión asociada a la transformación de Lorentz, con los dos índices arriba (dos veces contravariante) o los dos índices abajo (dos veces covariante).

La Transformación de Lorentz definida anteriormente es una vez covariante y una vez contravariante: tien un índice superior y uno inferior.

$$\Lambda^{\mu\alpha} = \eta^{\alpha\nu} \Lambda^\mu{}_\nu = \begin{bmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & -\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Hemos sumado sobre el índice  $\alpha$ . Análogamente:

$$\Lambda_{\alpha\nu} = \eta_{\alpha\mu} \Lambda^\mu{}_\nu = \begin{bmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & -\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

## Clasificación de los cuadri-vectores

Dados dos cuadvectores cualquiera  $A^\mu$  y  $B^\nu$ , mediante la métrica de Minkowski podemos definir un número a partir de ellos, de la siguiente forma:

$$\eta_{\mu\nu} A^\mu B^\nu = A^0 B^0 - A^1 B^1 - A^2 B^2 - A^3 B^3 \equiv A^\mu B_\nu = A_\mu B^\nu$$

La expresión a la derecha de la ecuación es un número, puesto que proviene de la suma de cada una de las componentes.

El caso más interesante es aquel en el cual usamos el mismo vector dos veces:

$$\eta_{\mu\nu} A^\mu A^\nu = A^0 A^0 - A^1 A^1 - A^2 A^2 - A^3 A^3 \equiv A^\mu A_\mu \equiv A_\mu A^\mu$$

Ahora, mediante esta operación podemos asociar un número a este vector:

$$\text{Si } A_\mu A^\mu > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{cuadvector tipo **tiempo**}$$

$$\text{Si } A_\mu A^\mu = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{cuadvector tipo **luz**}$$

$$\text{Si } A_\mu A^\mu < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{cuadvector tipo **espacio**}$$

De esta forma podemos clasificar a los cuadvectores; puesto que el signo y el valor de esta cantidad  $A_\mu A^\mu$ , es un invariante: vale lo mismo en todos los sistema inerciales.

El significado físico de esta cantidad es el siguiente: si un cuadvector es *tipo tiempo*, indica que es un vector que está contenido dentro del cono de luz. Por ejemplo si el cuadvector representa a la quadri velocidad de una partícula, ésta se desplaza con velocidades menores que la velocidad de la luz. En cualquier otro sistema de referencia inercial, se cumple la misma condición.

Si la partícula es *tipo luz*, el vector se apoya en el manto del cono de luz. Finalmente si el vector es *tipo espacio*, indica que el vector se ubica fuera del cono de luz.

## La cuadri-aceleración

Ahora procedemos a determinar la cuadriaceleración. Recordemos que a partir de nuestra definición de la cuadrivelocidad, tenemos:

$$u^\mu u_\mu = +1. \quad (\text{V.11})$$

De aquí derivando con respecto a  $ds$ :

$$\frac{d u^\mu}{d s} u_\mu + u^\mu \frac{d u_\mu}{d s} = 0. \quad (\text{V.12})$$

Definiendo la cuadiaceleración  $a^\mu \equiv \frac{dw^\mu}{ds}$ , y en forma similar  $a_\mu$ ,

$$a^\mu u_\mu + u^\mu a_\mu = 0, \quad (\text{V.13})$$

después de subir y bajar índices con la receta usual, se obtiene:

$$a^\mu u_\mu = 0. \quad (\text{V.14})$$

### Ejercicio

Encontrar la expresión de  $a^\mu$  como función de  $\gamma$ ,  $\vec{\beta}$  y  $\frac{d\vec{v}}{dt}$ .

### V.1.3. El cuadrimomentum

Usando los resultados de la sección anterior, podemos definir el cuadrimomentum  $P^\mu$ , como

$$P^\mu = \left( \frac{m_o c}{\sqrt{1 - \beta^2}}, m_o c \gamma \vec{\beta} \right) = m_o c (\gamma, \gamma \vec{\beta}), \quad (\text{V.15})$$

introduciendo la expresión de  $u^\mu$ ,

$$P^\mu = m_o c u^\mu. \quad (\text{V.16})$$

Como  $u^\mu$  es un cuadrivector,  $P^\mu$  también lo es.

El factor  $(m_o c)$  aparece por razones dimensionales, el cuadrivector  $u^\mu$ , no tiene dimensiones. La primera componente del cuadrivector momentum  $P^\mu$  se define como la energía asociada a la partícula. Las otras tres componentes constituyen el vector momento, es decir, éstas son las componentes que en un régimen no relativista se transformarán en el momentum usual de la mecánica Newtoniana.

Mencionamos que los invariantes son importantes puesto que toman el mismo valor en cualquier sistema de coordenadas. Calculemos el invariante obtenido a partir del cuadrimomentum.

$$P^\mu = \left( \frac{E}{c}, \vec{\mathbf{P}} \right) \quad (\text{V.17})$$

$$P^\mu P_\mu = (m_o c)^2 u^\mu u_\mu = (m_o c)^2 \quad (\text{V.18})$$

$$P^\mu P_\mu = \left( \frac{E}{c} \right)^2 - \vec{\mathbf{P}}^2 = m_o^2 c^2 \quad (\text{V.19})$$

En un sistema en que la partícula se encuentre en reposo,  $\vec{\mathbf{P}} = 0$ , y por lo tanto la energía toma el valor conocido

$$E = m_o c^2 \quad (\text{V.20})$$

Otra consecuencia de este cálculo es que la definición de masa en reposo está bien definida: es proporcional al valor del invariante  $P^\mu P_\mu$ , por lo tanto es un número que no depende del sistema de referencia utilizado.

#### V.1.4. La Conservación del Momentum.

Continuando con la generalización de las cantidades que aparecen en la mecánica usual de Newton, nos queda por definir la cuadrifuerza. Se define a partir del cuádrimomentum en la forma que se indica a continuación:

$$F^\mu \equiv \frac{dP^\mu}{ds}. \quad (\text{V.21})$$

Si **no** hay fuerzas externas actuando sobre el sistema de partículas que estamos estudiando, entonces  $F^\mu = 0$  y en un choque entre partículas ocurre que

$$P^\mu_{Total} = \text{Constante}. \quad (\text{V.22})$$

Como el cuádrimomentum se conserva, cada una de sus componentes se conserva, toma el mismo valor antes y después del choque.

$$P^o_{antes} = P^o_{después} \rightarrow \text{la energía se conserva.} \quad (\text{V.23})$$

$$\vec{\mathbf{P}}_{antes} = \vec{\mathbf{P}}_{después} \rightarrow \text{el momentum se conserva.} \quad (\text{V.24})$$

Una de las consecuencias de la conservación del 4 - momentum  $p^\mu$  es que la masa y la energía no sean independientes como ocurría en la mecánica de Newton. La ley de conservación de la masa y la ley de conservación de la energía se vuelven una sola en el contexto de la Relatividad Especial.

En relatividad Especial las ecuaciones son cuatro:

$$\begin{aligned} P^o_{inic} &= P^o_{final} \quad (\text{conservación de masa y energía}) \\ \vec{\mathbf{P}}_{inic} &= \vec{\mathbf{P}}_{final} \quad (3 \text{ ecuación, conservación del momentum}) \end{aligned}$$

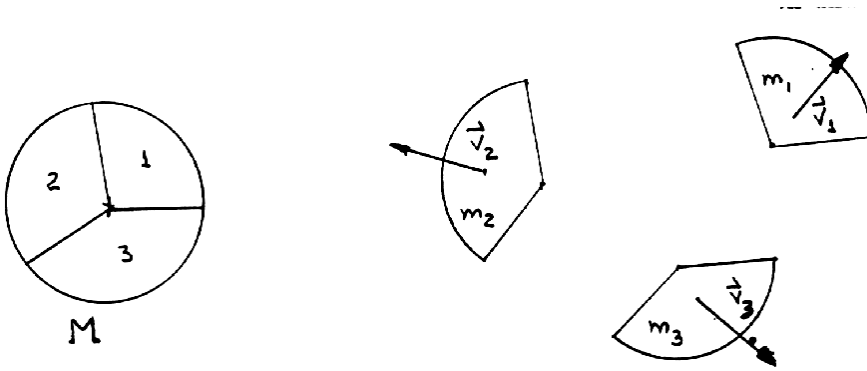


Figura V.4: En una explosión como la indicada, en la mecánica de Newton se conserva la masa, el momentum y la energía, en forma independiente. En el caso de la relatividad especial existen sólo 4 cantidades conservadas. La masa y la energía son equivalentes.

### Transformación de masa en energía

Supongamos que una masa  $M$ , inicialmente en reposo se divide, espontáneamente, en dos partículas idénticas. Demuestre que la suma de la mas de estas partículas es menor que  $M$ .

Identificando las componentes del cuadrivector momentum, tenemos:

$$P_{\text{inicial}}^{\mu} = \{M c, \vec{0}\}$$

$$P_{\text{final}}^{\mu} = \{(\gamma_1 m_1 + \gamma_2 m_2) c, \gamma_1 m_1 \vec{v}_1 + \gamma_2 m_2 \vec{v}_2\}$$

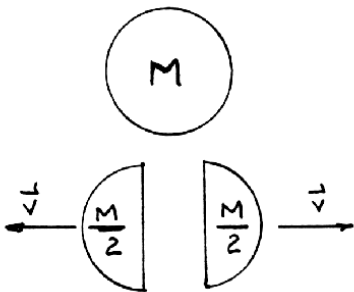


Figura V.5: Lo que se espera el caso newtoniano de esta desintegración.

Si ambos trozos 1 y 2 son idénticos  $m_1 = m_2$  y  $\gamma_1 = \gamma_2$ , entonces

$$P_{\text{final}}^{\mu} = \{2m c \gamma, \vec{0}\}, \quad \text{puesto que } \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = 0.$$

Comparando el momentum inicial y final, tenemos

$$M = 2m\gamma, \quad \text{como } \gamma \geq 1,$$

entonces  $M > 2m$ . La masa no se conserva. Como la masa y la energía forman una unidad en esta teoría:  $m_o c^2 \gamma$  y las dos masas producto de la desintegración son, en este esquema, objetos puntuales, la masa inicial se debe transformar en energía de movimiento. Definimos la energía cinética como:

$$T \equiv E - E_o, \quad (\text{V.25})$$

donde  $E_o$  proviene del invariante  $P^\mu P_\mu$

$$\begin{aligned} P^\mu P_\mu &= \frac{E^2}{c^2} - p^2 = \frac{E_o^2}{c^2}, \quad \text{con } p = \gamma m v. \\ E &= \sqrt{E_o^2 + p^2 c^2} \\ T &\equiv \sqrt{E_o^2 + p^2 c^2} - E_o. \end{aligned}$$

Desarrollando  $\gamma$  en serie de potencias de  $(v/c)^2$ , este mismo resultado se puede expresar como

$$\begin{aligned} T &= \frac{m c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m c^2 \\ T &= m c^2 \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8} \left( \frac{v^2}{c^2} \right)^2 \mp \dots \right\} - m c^2 \\ T &\equiv \text{Energía Cinética Relativista} = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{3m}{8} \left( \frac{v^4}{c^2} \right) \mp \dots \end{aligned}$$

Este es la definición de la energía cinética relativista. Es notable que el primer término es el usado en la aproximación newtoniana.

Aplicando esta expresión de la energía cinética relativista a las dos masas que se obtuvieron como resultado de la desintegración, obtenemos:

$$2T \equiv \text{Energía cinética relativista de las dos masas} = 2m\gamma c^2 - 2m c^2 = (M - 2m)c^2,$$

la diferencia de masa se transformó en energía cinética.



Históricamente Lavoisier propuso la ley de conservación de masa. Vemos acá que esta ley es una buena aproximación pero no es exacta. Claro está que la diferencia entre la masa inicial y final es, en la mayoría de los casos, despreciable.

La teoría define la energía como  $E = m_o c^2 / [1 - v^2/c^2]^{1/2}$  donde  $m_o$  queda definida como la masa propia de la partícula, por ejemplo el número asociado a un electrón, un protón...y que es una constante que permanece. No existe una teoría que a partir de primeros principios dé como resultado la masa del electrón, o la de cualquier otra partícula elemental, por ejemplo. Esta última información proviene del experimento y es un parámetro que debemos incorporar a la teoría. Es una excelente definición puesto que permite definir la familia de los electrones: aquellas partículas que tienen una conjunto de números iguales. Entre ellos la masa en reposo.

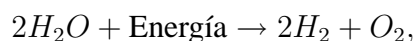
Cuando en un choque entre partículas existe una transformación de las partículas en otras, como por ejemplo en el decaimiento de una partícula inestable, las ecuaciones de la dinámica de la relatividad especial no proporcionan ninguna idea de cómo se produce esta transformación de un objeto en otro(s). El decaimiento de la partícula original es, desde este punto de vista, es una caja negra a la cual se le aplican los principios de la relatividad especial a los parámetros de entrada y salida. Éstos generan ciertas restricciones (como la conservación del cuadri-momentum), y a partir de ellos se restringen las características o propiedades de las partículas resultantes.

La física tiene sin duda muchas más restricciones. Casi siempre empíricas. La más importante, la conservación de la carga. Ninguna reacción puede infringir esta regla. La carga de entrada debe ser la misma que la observada a la salida, o en el resultado de la reacción.

Existen otras: conservación del número bariónico, número leptónico, extrañeza...

### La energía se transforma en masa

En la reacción



la energía añadida al agua se convierte en masa. En 1000 toneladas de agua convertida a hidrógeno y oxígeno, estos productos gaseosos tienen alrededor de 0,3 gramos de masa en exceso del original.

### Ejemplo

- Suponga que dos masas iguales  $m$  chocan frontalmente para producir una sola partícula de masa en reposo  $4m$ .

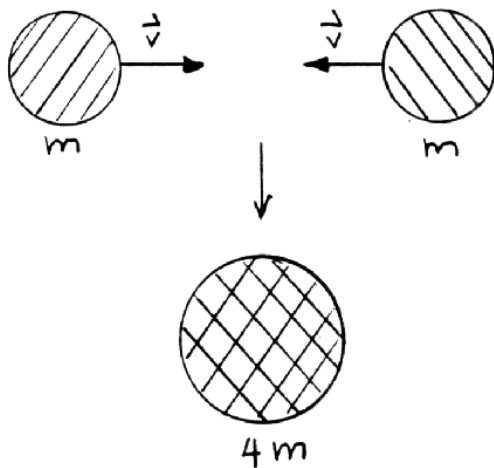


Figura V.6: Veamos el proceso inverso: dos masas chocan y el resultado es una sola masa en reposo. Este ejemplo tiene cierta dosis de realidad: los grandes aceleradores procuran generar reacciones atómicas haciendo chocar frontalmente un haz de partículas viajando en sentidos opuestos. El objetivo es ahorrar energía, recordemos que estos problemas no son lineales en la velocidad.

- b) El mismo caso anterior, pero ahora una de las partículas está en reposo en el Laboratorio y la otra choca frontalmente. Después del choque ambas partículas coalescen y dan por resultado una nueva partícula de masa  $4m$ . Calcule la energía de la partícula incidente.
- c Calcule la energía total de las dos partículas en el caso a) y de una sola partícula en el caso b). Compare ambos valores. **Solución**

a) Comparemos los cuadrimomentum inicial y final.

$$P_{in}^{\mu} = \left( 2 \frac{E_{final}}{c}, \vec{0} \right),$$

con  $P_{in}^{\mu} = \left( 2 \frac{E_i}{c}, P_1 + P_2 \right),$

pero  $\vec{P}_1 + \vec{P}_2 = 0,$  luego :

$$\frac{2 E_{ini}}{c} = E_{fin}/c$$

$$E_i = m \gamma$$

$$E_f = 4m$$

$$2m\gamma = 4m \Rightarrow \gamma = 2 \Rightarrow v = \frac{\sqrt{3}}{2} c = 0,87c$$

Ambas partículas deben aproximarse con la velocidad  $v = 0,87c$

- b) En el segundo caso, la partícula de masa  $4m$  no puede permanecer en reposo después del choque por conservación del momentum total.

Como el problema es un poco más complejo que los anteriores, utilizaremos el invariante  $p^\mu p_\mu$ , desde un comienzo. Comparamos el valor del invariante antes y después de la colisión. Como el invariante es un escalar, esta igualdad genera una sola ecuación. Hay probabilidades de éxito puesto que la única incógnita es la velocidad de la masa resultante. De esta forma

$$\left(\frac{E_1}{c} + mc\right)^2 - P_1^2 = \left(\frac{E_f}{c}\right)^2 - P_f^2$$

con  $P_1 = \gamma m v$ ,  $E_1 = mc^2 \gamma$ , entonces

$$(mc)^2 (\gamma_i + 1)^2 - \gamma_i^2 m^2 v^2 = (4\gamma_f mc)^2 - (4m\gamma_f v_f)^2$$

$$\gamma_i = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_i}{c}\right)^2}}, \quad \gamma_f = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_f}{c}\right)^2}}$$

$$(mc)^2 + 2(mc)^2 \gamma_i + \gamma_i^2 m^2 c^2 \left(1 - \frac{v_i^2}{c^2}\right) = 16\gamma_f^2 m^2 c^2 \left(1 - \frac{v_f^2}{c^2}\right)$$

$$2(mc)^2(1 + \gamma_i) = 16m^1 c^2, \quad \text{de aquí se obtiene } \gamma_i = 7, \quad \Rightarrow \quad v_i \simeq 0,99c.$$

En este caso, bombardear una partícula contra un blanco en reposo, se necesita una cantidad apreciablemente mayor de energía que el caso anterior. Es por esta razón que los aceleradores modernos utilizan haces de partículas que chocan frontalmente para producir como partículas más masivas. Los denominan "collider".

□

Por ejemplo, el descubrimiento del bosón  $Z$ , que era una predicción de la teoría de Weinberg, Salam y Glashow y que les valió el premio Nobel en 1979, tiene una masa mil veces mayor que la de un átomo. Como esta partícula es muy masiva, se obtuvo mediante el choque frontal de dos partículas (o mejor, flujo de partículas) en un acelerador. En este caso la masa de la partícula

$Z$ , el producto final, es 100.000 veces mayor que la masa de cada una de las partículas del flujo en choque frontal.

Esta partícula fue detectada en Enero de 1983. Para tener una idea de la magnitud del acelerador, éste contiene un magneto de 800 toneladas para producir un campo magnético de 0.7 Tesla. 1 Tesla =  $10^4$  Gauss. El campo magnético de la Tierra es del orden de 0,6 Gauss. En la estrella HD 215441 se ha detectado un campo magnético de 34.000 Gauss. En algunas enanas blancas se han medido campos de  $10^{+7}$  Gauss.

### Ejercicio Propuesto

Muestre que los dos últimos ejemplos, están relacionados por una transformación de Lorentz que nos lleva del sistema centro de momentum (masa  $M$ , en reposo decae en dos masas iguales, considerando  $M = 4m$ ) y el ejemplo similar donde uno de las masas  $m$  permanece en reposo y la otra masa similar se acerca con una cierta velocidad. Determine explícitamente la expresión de esta Transformación de Lorentz.

□

### Ejemplo

Una partícula de masa  $M$  en reposo, decae en dos partículas de masa  $m_1$  y  $m_2$ .

Demuestre que el momentum al cuadrado  $\vec{p}^2$  para cualquiera de las dos partículas es:

$$\vec{p}^2 = \frac{[(M - m_1)^2 - m_2^2] [(M + m_1)^2 - m_2^2]}{4 M^2} c^2.$$

Nota: Se sugiere que utilice  $m \gamma$  como variable a despejar. Pero recuerde que ésta no es la única estrategia para demostrar esta identidad.

### Solución

La conservación del cuadr momentum nos da las siguientes dos ecuaciones:

$$\begin{aligned} 1) m_1 \gamma_1 + m_2 \gamma_2 &= M && \text{conservación de la energía} \\ 2) m_1 \gamma_1 v_1 - m_2 \gamma_2 v_2 &= 0 && \text{conservación del momentum} \end{aligned}$$

Despejamos  $V$  en función de  $\gamma$  para tener sólo una variable:

$$v = \frac{\sqrt{\gamma^2 - 1}}{\gamma}$$

Reemplazando en las ecuación del momentum, obtenemos:

$$2)' m_1 \sqrt{\gamma_1^2 - 1} - m_2 \sqrt{\gamma_2^2 - 1} = 0$$

ordenando los términos:

$$2)'' m_1^2 \gamma_1^2 - m_2^2 \gamma_2^2 = m_1^2 - m_2^2.$$

Para resolver el sistema conviene definir una nueva variable:  $x \equiv m_1 \gamma_1$ ,  $y \equiv m_2 \gamma_2$ . Las ecuaciones quedan ahora:

$$1) \quad x + y = M, \quad 2)'' \quad x^2 - y^2 = m_1^2 - m_2^2.$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones, se obtiene

$$x = \frac{M^2 + (m_1^2 - m_2^2)}{2M}, \quad y = \frac{M^2 - (m_1^2 - m_2^2)}{2M}.$$

Como  $x = m_1 \gamma_1$  entonces

$$\begin{aligned} \vec{P}_1 &= \gamma_1 m_1 v_1 = m_1 \sqrt{\gamma_1^2 - 1} \\ (\vec{P}_1)^2 &= m_1^2 (\gamma_1 - 1)(\gamma_1 + 1) = (m_1 \gamma_1 - m_1)(m_1 \gamma_1 + m_1) \\ &= (x - m_1)(x + m_1) \\ (P_1)^2 &= \left( \frac{M^2 + (m_1^2 - m_2^2) - 2Mm_1}{2M} \right) \\ P_1^2 &= \frac{[(M - m_1)^2 - m_2^2][(M + m_1)^2 - m_2^2]}{4M^2} \end{aligned}$$

Podemos comprobar si este resultado es o no correcto, comparando con el caso en que ambas masas  $m_1$  y  $m_2$  son iguales:

$$P_1 = \frac{(M - 2m)(M + 2m)}{4} = \frac{M^2 - 4m^2}{4} = \frac{M^2 - 4m^2}{4}.$$

Obteniendo esta expresión utilizando el Ejemplo anterior que consideraba masas iguales, los resultados allí son:)

$$M = 2m\gamma, \quad p^2 = c^2[\gamma^2 m^2 - \vec{p}^2] = m^2 c^2$$

De aquí:

$$\frac{M^2}{4} - \vec{p}^2 = m^2, \quad \Rightarrow \quad \vec{p}^2 = \frac{M^2}{4} - m^2$$

Que es el mismo límite que se puede obtener para  $m_1 = m_2 = m$  en el resultado previo.

□

### Ejemplo

El siguiente ejemplo es el más general que uno puede enfrentar. Está extraído de la referencia [2]. Se hace uso de cambios de sistemas de referencia, se utiliza la idea de centro de momentum y se utilizan los invariantes en diversas situaciones.

Considere la reacción general entre dos partículas, que definimos como 1 y 2. El producto de esta reacción es otro par de partículas que denominamos 3 y 4.

$$1 + 2 \rightarrow 3 + 4$$

En el Sistema de Laboratorio la partícula 2 está en reposo y la partícula 1 viaja:  $\vec{P}_2 = 0$ .

Considere esta reacción en el Sistema **Centro de Momentum**. Por definición el centro de momentum está definido como:  $\vec{P}_1^{C.M.} + \vec{P}_2^{CM} = 0$ .

Recuerde la masa no es una cantidad conservada en los choques, de modo que no tiene sentido definir un centro de masa. Sí lo tiene el centro de momentum puesto que es una cantidad conservada.

Demuestre que:

$$(a) \quad E_{\text{Total}}^{C.M.} = c^2 \left( m_1^2 + m_2^2 + 2 \frac{m_2 E_1}{c^2} \right)^{1/2}$$

$$(b) \quad E_1^{CM} = c^4 \left[ \frac{(E_{\text{Total}}^{CM})^2}{c^4} + m_1^2 - m_2^2 \right] / \left( 2 E_{\text{Total}}^{C.M.} \right).$$

$$(c) \quad P_1^{CM} = \frac{m_2 c^2 P_1}{E_{\text{Total}}^{C.M.}}$$

$$(d) \gamma_{C.M.} = (E_1 + m_2 c^2) / E_{\text{Total}}^{C.M.}$$

$$\gamma_{C.M.} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_{C.M.}^2}{c^2}}} \quad v_{C.M.} \equiv \text{velocidad con respecto al sistema de Laboratorio.}$$

$$(e) v_{C.M.} = \frac{P_1}{\left(\frac{E_1}{c^2} + m_2\right)}$$

### Solución

a) El momentum total es  $\vec{P}_{\text{Total}} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 = \vec{P}_3 + \vec{P}_4$ . Por otra parte  $P_{CM}^\mu = \left[\frac{E_T^{CM}}{c}, \vec{0}\right] = P^{CM} \equiv \tilde{P}$  Como  $P^\mu P_\mu$  es un invariante, entonces toma el mismo valor en el sistema CM y en el sistema de referencia del laboratorio. Se cumple entonces la siguiente igualdad:

$$\tilde{P}^\mu \tilde{P}_\mu = \frac{\tilde{E}_T^2}{c^2} = (P_1^\mu + P_2^\mu)(P_{1\mu} + P_{2\mu})$$

en el Sistema de Laboratorio

$$P_1^\mu = \left(\frac{E_1}{c}, \vec{P}_1\right)$$

$$P_2^\mu = \left(\frac{E_2}{c}, 0\right) \quad (\text{dato: estaba inicialmente en reposo})$$

$$(P_1^\mu + P_2^\mu)(P_{1\mu} + P_{2\mu}) = P_1^\mu P_{1\mu} + P_2^\mu P_{2\mu} + 2P_1^\mu P_{2\mu}$$

$$(P_1^\mu + P_2^\mu)(P_{1\mu} + P_{2\mu}) = m_1^2 c^2 + m_2^2 c^2 + 2m_2 E_1,$$

$$m_1^2 + m_2^2 + 2m_2 \frac{E_1}{c^2} = \frac{\tilde{E}_T^2}{c^4}$$

$$\tilde{E}_T = c^2 \left[ m_1^2 + m_2^2 - 2 \frac{m_2 E_1}{c^2} \right]^{1/2}$$

b) En esta sección volveremos a usar las ventajas de los invariantes.

Considere el siguiente producto de dos tensores.

$$\tilde{P}_1^\mu (\tilde{P}_{\mu 1} + \tilde{P}_{\mu 2})$$

A pesar que esta definición parece arbitraria, sus ventajas se verán a continuación.

Es una cantidad invariante bajo transformaciones de Lorentz debido a la suma de Einstein de índices. Podemos evaluarla en dos sistemas de referencia diferentes: uno es el centro de momentum (izquierda de la ecuación) y sistema de laboratorio (derecha). Por ser un invariante, deben tener el mismo valor en ambos sistemas.

$$\tilde{P}_1^\mu (\tilde{P}_{\mu 1} + \tilde{P}_{\mu 2}) = P_1^\mu P_{\mu 1} + P_1^\mu P_{\mu 2}$$

Evaluando cada uno de los términos de la ecuación anterior

$$\frac{\tilde{E}_1}{c^2} (\tilde{E}_1 + \tilde{E}_2) = m_1^2 c^2 + E_1 m_2, \quad \text{donde hemos usado } E_2 = m_2 c.$$

Definiendo  $\tilde{E}_T$  como la energía total en el sistema centro de momentum y además  $\tilde{E}_1 \equiv E_1^{CM}$

$$\frac{\tilde{E}_1 \tilde{E}_T}{c^4} = m_1^2 + \frac{E_1 m_2}{c^2} \quad (\text{V.26})$$

usando la expresión obtenida para  $E_T$  en la parte a) de este ejercicio, que reproducimos aquí

$$\frac{\tilde{E}_T^2}{c^4} - m_1^2 - m_2^2 = \frac{2 E_1 m_2}{c^2}$$

reemplazando, obtenemos:

$$\frac{\tilde{E}_1 \tilde{E}_T}{c^4} = m_1^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\tilde{E}_T^2}{c^4} - m_1^2 - m_2^2 \right) = \frac{1}{2} \frac{E_T^2}{c^4} + \frac{1}{2} m_1^2 - \frac{1}{2} m_2^2,$$

Despejando de aquí  $\tilde{E}_1$ , tenemos

$$\tilde{E}_1 = \frac{1}{2} \tilde{E}_T + \frac{c^4}{2 \tilde{E}_T} (m_1^2 - m_2^2) = \frac{1}{2} \frac{c^4}{\tilde{E}_T} \left( \frac{\tilde{E}_T^2}{c^4} + m_1^2 - m_2^2 \right)$$

que es la expresión pedida.

(c) Debemos mostrar la siguiente igualdad:  $P_1^{CM} \equiv \tilde{P}_1 = \frac{m_2 c^2 P_1}{E_T^{CM}}$ . Escribamos un invariante que incluya información de la partícula 1. Utilicemos el sistema centro de momentum, que lo caracterizamos por una tilde.

$$\frac{\tilde{E}_1^2}{c^2} - \tilde{P}_1^2 = m_1^2 c^2$$



Debemos aislar  $\tilde{P}_1$ , de modo que no lo tocamos en lo que sigue. En la ecuación V.26 de la parte b), encontramos una expresión para  $\tilde{E}_1$ . Si la introducimos en la ecuación tenemos

$$\tilde{P}_1^2 = \frac{\tilde{E}_1^2}{c^2} - m_1^2 c^2 = \left[ \frac{E_1 m_2 + m_1 c^2}{\tilde{E}_T} \right] - m_1 c^2.$$

Incorporando el resultado de la sección a) para  $\tilde{E}_T$  sólo en el numerador, la expresión queda:

$$\tilde{P}_1^2 = \frac{m_2^2 (E_1^2 - (m_1^2))}{(\tilde{E}_T)^2} = \frac{m_2^2 c^4 \vec{P}_1^2}{(\tilde{E}_T)^2}.$$

(d)  $\gamma_{CM} = ?$

$$P_{\text{Total}}^\mu = P_1^\mu + P_2^\mu \quad \text{Sistema de laboratorio,}$$

$$= (E_{\text{Total}}, \vec{P}_1 + \vec{0})$$

$$P_{CM}^\mu = (E_{CM}, \vec{0}) \quad \text{Sistema Centro de Momentum,}$$

$$P_{\text{Total}}^0 = \gamma_{C.M.} (P_{CM}^0 + \vec{\beta} \cdot \vec{P}_{CM})$$

Transformación de lorentz para ir de S.Lab. al C. de Momentum.

$$\gamma_{CM} = \frac{E_{\text{Total}}}{E_{CM}} = \frac{\frac{E_1}{c} + m_2 c}{\frac{E_{C.M.}}{c} \quad \text{Total}}$$

$$\gamma_{CM} = \frac{E_1 + m_2 c^2}{E_{\text{Total}}^{CM}}$$

□

## V.2. El Fotón

Definimos al fotón como una partícula con masa en reposo  $m_o = 0$ . De acuerdo a esta restricción el invariante  $p^\mu p_\mu = m_o^2 c^2$  se transforma, para este caso específico en  $p^\mu p_\mu = 0$ . De este resultado se desprende que  $|\vec{p}| = p^o \equiv E/c$ .

Adelantándonos a los hechos, usamos resultados de mecánica cuántica (que estudiaremos más adelante) y definimos la energía de esta partícula tipo luz como

$$E \equiv \hbar \omega, \quad (\text{V.27})$$

donde  $\hbar$  es una constante universal, conocida como la constante de Plank, cuyo origen explicaremos más adelante.  $\hbar$  es el signo inequívoco de la presencia de la mecánica cuántica en las consideraciones del problema.

### Ejercicio

a.- Calcule las dimensiones de la constante de Plank  $\hbar$ .

b.- Usando  $\hbar$  y las otras dos constantes universales ya conocidas,  $c$ , la velocidad de la luz y  $G$ , la constante de gravitación universal, encuentre una cantidad que tenga dimensiones de largo, (conocida como el largo de Plank), de tiempo y de masa. estime sus valores numéricos en el sistema MKS.

**Solución** (Sólo de la parte a.-)

$$[E] = [\hbar] [T]^{-1}.$$

El valor de esta constante es  $\hbar = 1,05 \times 10^{-34}$  Joules-s.

### Ejemplo

Con anterioridad, utilizando el factor que denominamos  $k$ , encontramos el efecto Doppler relativista. Re-obtenga dicho resultado utilizando transformaciones de Lorentz sobre el vector momentum para un fotón. Considere dos observadores, uno en reposo y el otro en movimiento con velocidad  $v$  alejándose de la fuente.

### Solución

En este caso pondremos a prueba esta definición de fotón. Queremos saber si es coherente con la definición anterior de efecto Doppler.

Como aparece la frecuencia  $\omega$  en la definición, lo primero que debemos hacer es comprobar la compatibilidad de esta definición con la ley de transformaciones de la frecuencia entre dos Sistemas Inerciales en movimiento relativo proveniente de la relatividad especial. Sabemos que:

$$\omega' = \omega \sqrt{\frac{c-v}{c+v}}$$

Usando las Transformaciones de Lorentz sobre el cuadri-momentum  $p^\mu$ :

$$E' = \frac{E - vp}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

Incorporando las definiciones conocidas

$$E = \hbar\omega \quad E' = \hbar\omega'$$

A partir de estos resultados, la transformación de Lorentz es:

$$\hbar\omega' = \frac{\hbar\omega - vp}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

Como el vector momentum NO es independiente de la energía, tenemos que

$$p = \frac{\hbar\omega}{c} \quad \text{o} \quad p = \frac{E}{c}$$

Reemplazando estos valores en la expresión de la energía se re-obtiene el efecto Doppler relativista

$$\omega' = \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}} \omega. \quad (\text{V.28})$$

No existe contradicción entre los resultados previos donde se analizó la transformación de la frecuencia  $\omega$  y esta nueva definición de la energía y por tanto del momentum asociado a un fotón.

□

### Ejemplo

El mismo problema anterior pero ahora consideremos que el fotón choca con una masa  $M$  que viaja al encuentro del fotón con una velocidad  $v$ .

a.- Encuentre el cambio de frecuencia que experimenta el fotón al rebotar contra esta masa  $M$ .

b.- Investigue el límite  $M \rightarrow \infty$ . Comente.

c.- Dibuje un diagrama espacio tiempo para este problema para los dos casos anteriores.

### Solución.

Este es un problema de choque usual, salvo que en una de las partículas, el fotón, la energía y el momentum están relacionados. esta es una ecuación adicional que puede facilitar los cálculos.

La conservación del momentum y de la energía se escriben:

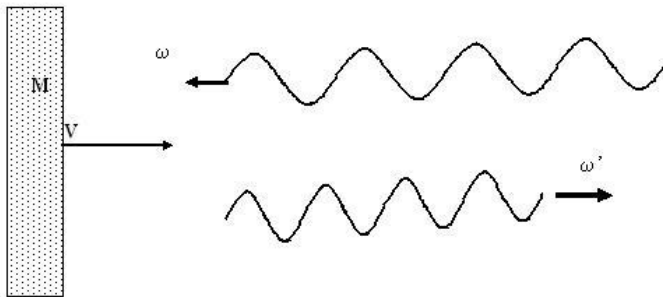


Figura V.7:

La ecuación de la energía es:

$$E_{\text{fotón}}/c + \gamma_V M c = E'_{\text{fotón}}/c + \gamma_{V'} M c$$

, donde  $E_{\text{fotón}} = \hbar \omega$  y  $E'_{\text{fotón}} = \hbar \omega'$ .

La ecuación del momentum es :

$$p_{\text{fotón}} + \gamma_V M V = -p'_{\text{fotón}} + \gamma_{V'} M V'.$$

Por ser estas ecuaciones no-lineales en  $V$  y  $V'$ , la velocidad del espejo antes y después del choque con el fotón, son difíciles de resolver. Como suponemos que la masa del espejo es

mucho mayor que la energía y el momentum del fotón, parece razonable usar aproximaciones para resolver esta ecuación.

Primero, suponemos que  $V = V'$ , es decir la masa no se ve afectada por el choque. Esta es la aproximación de orden cero.

En este caso la ecuación de la energía se reduce a  $\hbar\omega + \gamma_V M c = \hbar\omega' + \gamma_V M c$ . La solución de esta ecuación es  $\omega = \omega'$ , es la respuesta trivial. Sin embargo esta ecuación NO es consistente con la conservación del momentum. No es una respuesta física para este problema. (Note que en mecánica muchas veces se hace rebotar una pelota en una pared sin decir nada acerca de la conservación del momentum. Lo que sucede en esa situación es que existe deformación de los cuerpos y disipación, por ejemplo ruido.)

Esta contradicción no nos sorprende. Puede verse de la siguiente forma: si hacemos una transformación de Lorentz y nos ponemos en el sistema de referencia fijo al espejo, entonces, en este caso, el fotón rebotó con una pared en reposo y no podría cambiar de frecuencia. Note que sí cambió la frecuencia al hacer la transformación de Lorentz. Esto de acuerdo al factor  $k$  (la fórmula encontrada anteriormente V.28), y más, es diferente para el fotón incidente y reflejado.

Entonces esta es una mala aproximación.

En la siguiente aproximación incluyamos un cambio en la velocidad de la masa  $M$  par que la conservación del momentum nos dé información. Volvamos a las ecuaciones exactas y resolvámoslas al orden más bajo de aproximación, que es  $v/c$ . Solo escribimos los términos hasta este orden de aproximación. Cualquier cantidad que contenga  $(v/c)^2$  la consideramos igual a cero.

Construyamos la aproximación a orden  $(v/c)$ .

Si multiplicamos por  $c$  la ecuación de la energía y aproximamos  $\gamma_V \approx 1 - V^2/(2c^2) \mp \dots$  y análogamente  $\gamma_{V'}$ , tenemos:

$$\hbar\omega + [M c^2 + \frac{1}{2} M V^2] = \hbar\omega' + [M c^2 + \frac{1}{2} M V'^2]$$

, o simplificando  $M c^2$ ,

$$\hbar\omega + \frac{1}{2} M V^2 = \hbar\omega' + \frac{1}{2} M V'^2.$$

Ahora podemos apreciar el error cometido en el primer intento de resolver el problema: habíamos despreciado el término de la energía cinética  $M V^2/2$  que emerge limpio (sin factores de  $c$ ) en esta aproximación de  $\gamma$ .

La ecuación del momentum queda como:

$$\hbar\omega + cMV = -\hbar\omega' + cMV'$$

Ordenando las ecuaciones de la siguiente forma

$$\hbar\omega - \hbar\omega' = \frac{1}{2}MV'^2 - \frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}M(V' - V)(V' + V)$$

$$\hbar\omega + \hbar\omega' = M(V' - V)c.$$

Reemplazando esta última ecuación en la anterior, tenemos

$$\hbar\omega - \hbar\omega' = \frac{\hbar}{2c}(V' + V)(\omega + \omega').$$

Si eliminamos  $V'$ , desde la ecuación de conservación del momentum y ordenamos adecuadamente los términos obtenemos:

$$\hbar(\omega - \omega') = \left(\frac{V}{c}\right)\hbar(\omega + \omega') + \left(\frac{\hbar^2(\omega + \omega')^2}{2c^2M}\right). \quad (\text{V.29})$$

En palabras, la diferencia de energía del fotón incidente y emergente es igual a un término proporcional a  $v/c$  multiplicado por la energía del fotón antes y después del choque más un término que es la razón entre el cuadrado de la suma de la energía del fotón incidente y reflejado y la energía en reposo de la masa  $M$ . b.- Si  $M \uparrow \infty$  y a primer orden en  $\frac{v}{c}$ , tenemos

$$\omega' = \omega \frac{(1 - v/c)}{(1 + v/c)} \quad \text{o} \quad \omega' \sim \omega \left(1 - \frac{2v}{c}\right) \quad (\text{V.30})$$

Este es el mecanismo con el cual opera el radar de la policía para medir la velocidad de los vehículos en la carretera. Envía una señal con frecuencia  $\omega$  y recibe la señal reflejada con frecuencia  $\omega'$ . La diferencia relativa entre ambas nos da la velocidad del vehículo:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} \sim 2\frac{v}{c}.$$

De forma que si el policía afirma poder medir una diferencia de 5 km/h en un vehículo, su pistola debe tener una resolución mejor que  $2 \times 18000/[300,000 \times 3600] \approx 3,3 \times 10^{-3}$ .

Las pistolas no emiten una frecuencia fija sino tienen un ancho de banda, una distribución de la intensidad en un rango de frecuencias. Pero este ejemplo ilustra la idea básica y constituye una prueba que nuestra hipótesis inicial V.27,  $E = \hbar\omega$  pasa esta prueba de blancura.

### V.2.1. Principio Variacional.

Encontraremos el momentum usando cálculo variacional, porque de allí calculando el Hamiltoniano encontraremos la expresión relativista de la energía.

$$S = \alpha \int L dt, \quad (\text{V.31})$$

$S$  es la acción y  $L$  es el Lagrangiano. La cantidad  $L dt$  deber ser un *invariante relativista*, porque de esta forma, a través de este método, encontramos una ecuación de movimiento independiente del sistema de referencia (o mejor válida en cualquiera de ellos).

El invariante más simple es  $ds$ .

$$\begin{aligned} S &= \alpha \int ds = \alpha \int \sqrt{c^2 dt^2 - dx^2}, \\ &= \alpha c \int dt \sqrt{1 - \beta^2}, \\ &\simeq \alpha c \int dt \left(1 - \frac{1}{2} \beta^2\right), \quad \text{si } \beta^2 \ll 1. \end{aligned}$$

El objetivo de tomar la aproximación  $\beta^2 \ll 1$  es determinar el valor de la constante  $\alpha$  introducida al comienzo del cálculo a partir del límite no-relativista. Como este límite la fórmula relativista debe coincidir con la usual en mecánica, procedemos a ajustar la constante  $\alpha$  para que el lagrangiano tome la expresión:  $L = T - V$ . En nuestro caso  $V = 0$ , puesto que no hay fuerzas. De este modo:

$$ds = \alpha c dt - \frac{\alpha v^2}{2c} dt \quad \Rightarrow \quad \alpha = -m_o c,$$

$m_o$  se define como la masa de la partícula medida en un sistema en reposo con respecto a ella. La acción es:

$$S = -m_o c^2 \int dt + \int \frac{m_o v^2}{2} dt \quad (\text{V.32})$$

el primer término  $-m_o c^2 \int dt$  no afecta las ecuaciones de movimiento por ser una constante: se cancela al tomar la variación del Lagrangiano con extremos fijos.

Se introdujo una constante  $m_o$ , que llamaremos  $m_o \equiv$  masa en reposo de la partícula.

$$S = \int (-m_o c^2 \sqrt{1 - \beta^2}) dt$$

(V.33)

$$L = L(v)$$

A partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange podemos definir, en forma canónica, el momento asociado a una partícula.

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{P}} &= \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{m_o}{\sqrt{1 - \beta^2}} \vec{v} \\ \vec{\mathbf{P}} &= \frac{m_o}{\sqrt{1 - \beta^2}} \vec{v} = m_o \gamma \vec{v}\end{aligned}\tag{V.34}$$

La componente temporal del 4-vector momentum,  $P^0$ , se define a partir del Hamiltoniano.

$$\begin{aligned}H &\equiv \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} \cdot \vec{v} - L = \frac{m_o v^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} + m_o c^2 \sqrt{1 - \beta^2}, \\ H &= \frac{m_o c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}.\end{aligned}$$

El hamiltoniano  $H$  representa la **energía** total de la partícula, como puede comprobarse en el caso no-relativista. Definimos la energía  $E = H$

$$E = \frac{m_o c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}\tag{V.35}$$

En la siguiente sección definimos el cuádrimomento.

Note que, de acuerdo a lo establecido al comienzo de esta sección de cuádrivectores, son las propiedades de transformación las que determinan cuando un cuádrivector está bien definido o no. Si la asociación que *definimos* aquí es compatible con las transformaciones de Lorentz entonces está correcta.

### V.3. Ecuaciones de Maxwell

las ecuaciones de Maxwell no necesitan ninguna modificación para incorporar la relatividad especial. Son relativistas. Es una teoría relativista inventada antes que existiera la relatividad.

En esta sección escribiremos las ecuaciones de Maxwell en lenguaje covariante, usando cuádrivectores y notación (sólo eso) tensorial. Previamente debemos aprender cómo transforman algunos elementos geométricos, como el volumen, por ejemplo. En lugar de escribir la



carga y la corriente en forma separada, definiremos una cuadri-corriente que congrega a estos cuatro elementos (la densidad es una componente y las otras tres componentes provienen del vector densidad de corriente). El campo eléctrico y magnético se agrupan en una matriz de  $4 \times 4$  antisimétrica, ordenadamente, puesto que el campo eléctrico es un vector y la inducción magnética un pseudo-vector. La matriz tiene 6 componentes independientes que dan cuenta de las componentes del campo eléctrico y la inducción magnética.

### V.3.1. Transformación de un elemento de 4-Volumen

El elemento de cuadri-volumen es un invariante.

$$\begin{aligned}\Delta x' &= \gamma(\Delta x - v\Delta t) \\ \Delta t' &= \gamma\left(\Delta t - \frac{\beta}{c}\Delta x\right) \\ \Delta y' &= \Delta y \\ \Delta z' &= \Delta z\end{aligned}$$

Ahora, instantáneamente es  $S'(\Delta t' = 0)$  el observador mide el elemento de largo  $\Delta x$

$$\begin{aligned}\Delta x &= \gamma(\Delta x' - v\Delta t') \\ \boxed{\Delta x = \gamma\Delta x'} \quad \Delta t' = 0\end{aligned}$$

En un mismo punto  $x', y', z'$  medimos el intervalo de tiempo en  $S$ ,  $\Delta t$ :

$$\Delta t' = \gamma \cdot \Delta t$$

$$\begin{aligned}\Delta x' \cdot \Delta y' \cdot \Delta z' \cdot \Delta t' &= \gamma \cdot \Delta t \cdot \frac{\Delta x}{\gamma} \cdot \Delta y \cdot \Delta z \\ &= \Delta t \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z\end{aligned}$$

$d^4x'$  es un invariante bajo transformaciones de Lorentz.

$$\begin{aligned}d^4x' &= \left| \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \right| d^4x^{\nu} \\ \left| \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \right| &= \det \Lambda_{\nu}^{\mu} = +1\end{aligned}$$

El signo más indica una transformación de coordenadas ortocrona, es decir, que conserva el sentido del tiempo.

En una transformación en las coordenadas espaciales ocurre:

$$\begin{aligned}\sqrt{-g'} d^4x' &= \sqrt{-g} d^4x \\ \sqrt{-g} &= r^2 \operatorname{sen}^2\theta \quad (\text{coordenadas esféricas})\end{aligned}$$

por la misma razón anterior, el Jacobiano de una transformación de coordenadas espaciales (por ejemplo, de coordenadas  $x, y, z$  a  $r, \theta, \varphi$ ) está dado por:

$$\text{Jacobiano} = \left| \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \right| = \det \left| \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \right| = \sqrt{g}$$

donde  $g$  es el determinante de la métrica  $g_{\mu\nu}$ . Si además se incluye el tiempo y una transformación de Lorentz, tenemos:

$$\sqrt{-g'} d^4x' = \sqrt{-g} d^4x$$

Esta es una relación general, válida para cualquier tipo de transformación de coordenadas. En realidad es una relación general porque es un invariante tensorial. Bajo este disfraz se puede escribir como:

$$\begin{aligned}d^4x &\equiv \frac{1}{4!} e_{\mu\nu\sigma\tau} dx^{\mu} dx^{\nu} dx^{\sigma} dx^{\tau} \\ e_{\mu\nu\sigma\tau} &= \sqrt{-g} \varepsilon_{\mu\nu\sigma\tau} \\ \varepsilon_{0123} &= +1 \\ \varepsilon_{0023} &= 0 \\ \varepsilon_{1023} &= -1\end{aligned}$$

Donde el tensor  $e_{\mu\nu\sigma\tau}$  es el tensor totalmente antisimétrico, que toma los valores indicados. La forma natural de definir este elemento es recurriendo a las formas diferenciales.

### V.3.2. Las Ecuaciones de Maxwell

$$\frac{e^2}{4\pi\hbar c} = \alpha = \frac{1}{137} \text{ Unidades Sistema racionalizado de Heaviside-Lorentz}$$

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{B} &= 0 & \nabla \wedge \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0 \\ \nabla \cdot \vec{E} &= \rho & \nabla \wedge \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \vec{J}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F^{\mu\nu} &= \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \\ \partial^i &= -\partial_i \\ F^{oi} &= -E^i\end{aligned}$$

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ & 0 & -B^3 & B^2 \\ & & 0 & -B^1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$F^{\mu\nu}, \mu = J^\nu \quad J^\nu = (\rho, \vec{J})$$

$$\begin{aligned}F^{*\mu\nu} &= \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\sigma\tau} F_{\sigma\tau} \\ \partial_\mu F^{*\mu\nu} &= 0\end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} A^\mu \rightarrow A^\mu + \partial^\mu \chi \\ \vec{A} \rightarrow \vec{A} - \nabla \chi \\ \phi \rightarrow \phi + \frac{\partial \chi}{\partial t} \end{array} \right.$$

### Ecuaciones Masivas con spin 1

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu = 0$$

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

### Conservación de la Carga

#### Ejemplo

En un alambre infinito se ubica una serie infinita de cargas  $q$  separadas por una distancia  $a$  en el sistema  $S$  que se encuentra en reposo con respecto al alambre.

Suponga un observador viajando con una velocidad  $v$  paralela al alambre. Encuentre la densidad lineal de cargas que mide este observador  $S'$

$$\text{En } S \text{ la densidad es } \lambda = \frac{q}{a}.$$

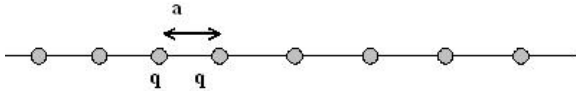


Figura V.8:

En  $S$  la distancia  $a$  cambia

$$\begin{aligned}\Delta x &= \gamma(\Delta x' - v\Delta t') \\ \Delta t &= \gamma(\Delta t' - \frac{v}{c^2}\Delta x) \\ \Delta x &= x_A - x_o = x_B - x_o \\ (x_B - x_o) &= \gamma[(x'_B - x'_o) - 0] \\ L &= \gamma L'\end{aligned}$$

$$\Rightarrow a' = \frac{a}{\gamma}$$

De modo que

$$\begin{aligned}\lambda' &= \frac{q}{a'} = \gamma \frac{q}{a} = \gamma\lambda \\ \lambda' &= \gamma\lambda.\end{aligned}$$

De acuerdo a  $S'$ , existe una densidad lineal de corriente  $J'_x = -\lambda' v$

$$\begin{aligned}
 J^\mu &= (c\lambda, \vec{J}) \\
 J^\mu J_\mu &= c^2 \lambda^2 \quad (\text{en } S) \\
 J'_\mu J'^\mu &= c^2 \lambda'^2 - \lambda'^2 v^2 = \lambda'^2 c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \\
 &= \gamma^2 \lambda^2 c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \lambda^2 c^2
 \end{aligned}$$

Se verifica que  $J^\mu = (c\lambda, \vec{J})$  es el 4 - vector densidad de corriente.

Otra forma de llegar al mismo resultado:

$$J^\mu = (\rho c, \rho \vec{v})$$

$$\begin{aligned}
 \rho &= \frac{Nq}{v} \\
 c\rho' &= \Lambda_\nu^0 J^\nu \\
 &= \Lambda_0^0 J^0 + \Lambda_1^0 J^1 \\
 &= \gamma \rho c + \gamma \beta \rho v \\
 \rho' c &= \rho c \gamma (1 - \beta^2) = \frac{\rho c}{\gamma} \Rightarrow \boxed{\rho' = \frac{\rho}{\gamma}} \\
 \nu' &= \Delta x' \Delta y' \Delta z' \\
 \Delta x' &= \gamma \Delta x \quad (\Delta t = 0) \\
 \nu' &= \gamma \Delta x \Delta y \Delta z = \gamma \nu \\
 \rho' &= \frac{Nq}{\nu'} = \frac{Nq}{\gamma \nu} = \frac{\rho}{\gamma}
 \end{aligned}$$

## V.4. Confirmación experimental de la relatividad especial

### Experimento de R. F. C. Vessot

A continuación describiremos un experimento realizado en 1980, con el objeto de comprobar las predicciones de la teoría de la relatividad general y especial [?], usando un reloj atómico. El acuerdo entre teoría y experimento que se verificó en este caso lo interpretaremos como una

confirmación de que la naturaleza se ajusta, dentro de las aproximaciones usadas, a sus postulados. No existe, hasta el momento, un experimento que contradiga las predicciones sostenidas por la relatividad especial. Este hecho constituye una buena justificación para estudiarlas.

El experimento se realizó dentro de un cohete *Scout* que fue enviado a 10.000 km. de altura con un reloj atómico en su interior. Este reloj es en realidad un *Maser*: acrónimo de **M**icrowave **A**mplification by **S**timulated **E**mission of **R**adiation, o Amplificación de micro-ondas mediante emisión estimulada de radiación, emite una onda cuya frecuencia  $f_o$  es de 1420,405751 Mhz, y permanece sin cambiar por un período de 100 segundos. Esta señal llega a tierra con una frecuencia  $\nu$  y es comparada con la emitida por un reloj similar instalado en el lugar de recepción en tierra. Las variaciones porcentuales de frecuencia entre ambos relojes

$$\frac{\Delta \nu}{\nu_o} \equiv \frac{\nu - \nu_o}{\nu_o},$$

están dadas, de acuerdo a las predicciones de la relatividad general, por la siguiente expresión:

$$\frac{\Delta \nu}{\nu_o} = \frac{\varphi_t - \varphi_s}{c^2} - \frac{|\vec{V}_t - \vec{V}_s|^2}{2c^2} - \frac{\vec{r}_{S-t} \cdot \vec{a}_t}{c^2}. \quad (\text{V.36})$$

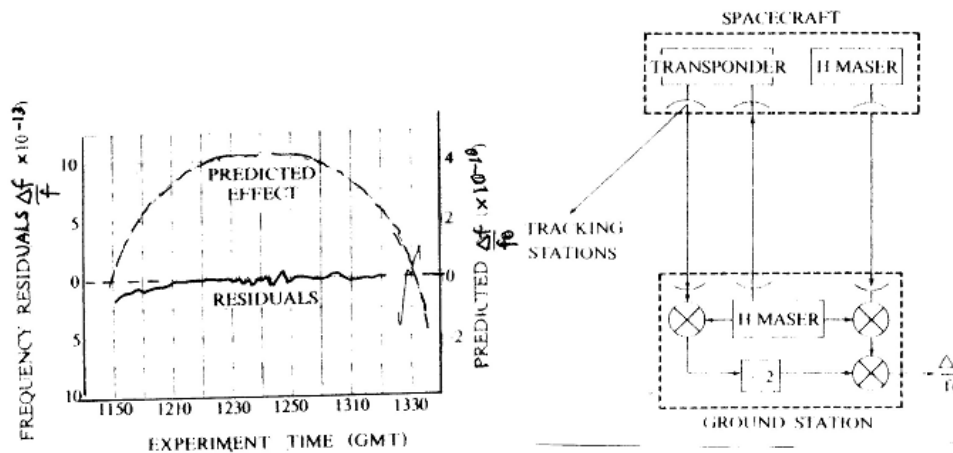


Figura V.9: Esquema del experimento realizado con el cohete **Scout**. Lo que se denomina los residuales es la diferencia entre lo esperado por la teoría y el valor experimental obtenido. la aceleración que experimenta el cohete llega a 18g y es preciso corregir los valores obtenidos cuyo origen es la aceleración, el plasma que se forma alrededor de la nave etc.

El subíndice  $t$  indica *tierra* y  $S$  el cohete *Scout*.  $\varphi$  indica el potencial gravitacional Newtoniano en la superficie de la tierra y en la posición del cohete, de acuerdo al subíndice. Esta corrección es un efecto neto de la relatividad general: el tiempo transcurre más rápidamente en los puntos o regiones donde el potencial gravitacional es más débil. El segundo término corresponde al efecto Doppler de segundo orden, debido a la velocidad relativa entre el cohete y la base en tierra. El efecto Doppler de primer orden, proporcional a  $V/c$ , se elimina rebotando en el cohete una señal adicional de frecuencia conocida y comparándola con la frecuencia que retorna. Es un efecto similar al radar que la policía usa para medir la velocidad.

El tercer término de la fórmula V.36 proviene de la aceleración que experimenta el cohete, y  $r_{S-t}$ , indica la distancia desde el cohete al centro de la tierra.

La ecuación V.36 constituye la predicción teórica.

Al comparar las frecuencias recibidas desde la nave con las del reloj en la base y corregir los datos para tomar en cuenta un conjunto de factores mencionados a continuación, se llegó a la conclusión que la teoría de la relatividad (especial y general) y el experimento son consistentes a un nivel de precisión de 70 partes en  $10^{-6}$ .

Algunos de los efectos que debieron ser tomados en cuenta para eliminar los errores de los datos obtenidos, fueron: campos magnéticos variables en magnitud y dirección, rotación de la última etapa del cohete, variaciones de la presión barométrica y temperatura. Otros efectos adicionales son la aceleración de aproximadamente  $18-g$  a la que está sometido el cohete durante su lanzamiento y la dispersión en la señal debido a la columna de electrones de la ionósfera que se interpone entre la nave y la base.

En este experimento no es posible distinguir entre los efectos cinemáticos proporcionales a potencias de  $V/c$ , de los dinámicos, que son generados por la relatividad general (proporcionales al potencial gravitacional). Esto debido a que el cohete Scout, varía constantemente su altura y velocidad durante el corto tiempo que dura el experimento.

### Experimento Hafele y Keating

(J. C. Hafele y R. E. Keating, Science, **177**, 166, 1972, pag 166.)

Este experimento consiste en ubicar cuatro relojes atómicos de Cesio en el interior de un avión que fueron trasladados en un vuelo regular de una línea comercial de aviación alrededor del mundo dos veces consecutivas: una en dirección Este y la otra hacia el Oeste. El experimento fue realizado por J.C. Hafele y R. E. Keating en 1972, y su objetivo fue poner a prueba la teoría de la relatividad de Einstein utilizando relojes macroscópicos.

Como veremos después, la razón entre los tiempos registrados por un reloj en Tierra y otro en movimiento, pero con una velocidad baja ( $u^2 \ll c^2$ ) se reduce a  $[1 - u^2/(2c^2)]$ , donde  $c$  es la velocidad de la luz. Como en este caso la Tierra está rotando los relojes estandar distribuidos

sobre la superficie no pueden ser utilizados como relojes coordinados en un sistema inercial. De todas maneras pueden ser evaluados con respecto a un hipotético reloj ubicado en el Polo Norte (o Sur). En este caso al comparar ambos relojes, el reloj de referencia ubicado en el Polo observa que el localizado en el Ecuador con una velocidad  $R\Omega$ , y de esta forma mide un retraso en su medición:

$$1 - \frac{R^2 \Omega^2}{2c^2}, \quad \text{donde } R \text{ es el radio de la Tierra y } \Omega,$$

es su velocidad angular. Por otra parte la nave que circun-navega la Tierra cerca del plano ecuatorial con una velocidad  $\nu$  relativa a la Tierra, experimenta un retraso proporcional a

$$1 - \frac{(R\Omega + \nu)^2}{2c^2}.$$

Por lo tanto si  $\tau$  y  $\tau_o$  son los tiempos registrados por el reloj en el avión y en Tierra respectivamente durante una circunvalación completa, su diferencia, en primera aproximación est'a dada por:

$$\tau - \tau_o = -\frac{2R\Omega\nu + \nu^2}{2c^2} \tau_o.$$

En consecuencia, si la nave viaja en el mismo sentido de rotación de la Tierra (Este,  $\nu > 0$ ) debería producir un retraso en el tiempo indicado en el reloj de la nave. De la misma manera, un viaje contra el sentido de rotación de la Tierra (Oeste  $\nu < 0$ ) debería producir un adelanto en el tiempo de la nave si  $\nu \approx R\Omega$ .

La relatividad general predice un efecto adicional que, en el caso de campos gravitacionales débiles es proporcional a la diferencia en el potencial gravitacional entre la nave y el reloj en Tierra. Si el valor de la aceleración de gravedad es  $g$  y la altura que alcanza la nave es  $h \ll R$ , la diferencia de potencial es  $gh$ . Al introducir este nuevo elemento en la ecuación que relaciona los tiempos relativos, se obtiene:

$$\tau - \tau_o = \left[ \frac{gh}{c^2} - \frac{2R\Omega\nu + \nu^2}{2c^2} \right] \tau_o.$$

El término  $gh/c^2$  se denomina el *corrimiento al rojo gravitacional*, y predice un aumento en el tiempo de los relojes ubicados sobre el nivel de la Tierra.

Para las velocidades y alturas típicas que alcanzan las aeronaves, ambos términos de esta última ecuación: el gravitacional y el cinemático son comparables en magnitud absoluta. El término  $\nu^2/(2c^2)$  es pequeño comparado con  $R\Omega\nu/c^2$ . De esta forma en el viaje hacia el Oeste ( $\nu < 0$ ) ambos términos son positivos y se suman para una ganancia neta apreciable en los tiempos medidos. En el viaje hacia el Este ( $\nu > 0$ ), tienden a cancelarse y a producir una diferencia neta pequeña.



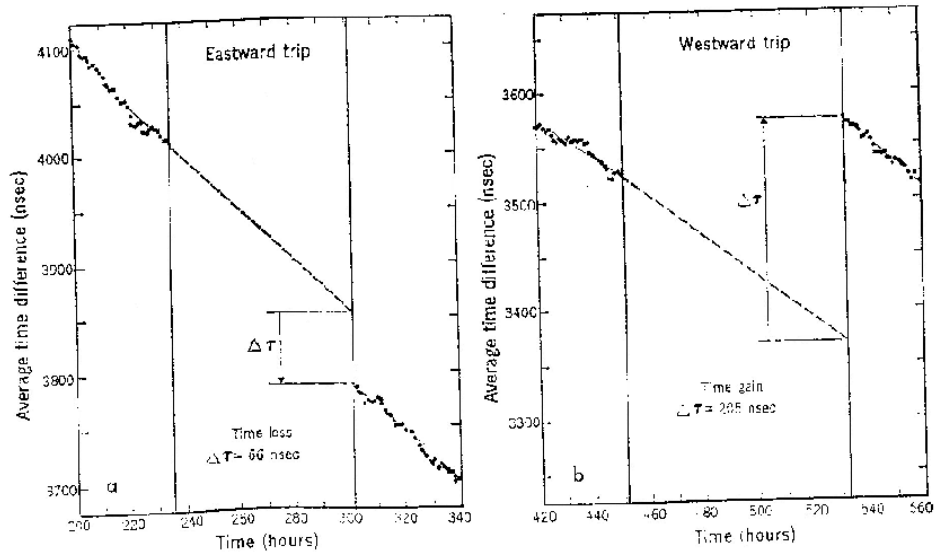


Figura V.10: Los intervalos  $\Delta \tau$  señalados en la figura, corresponden a la diferencia observada entre el reloj atómico en viaje y el que permaneció en tierra. Existe una diferencia entre viajar al Este y al Oeste debido a la rotación de la tierra, que estos relojes son capaces de detectar.

Podemos comparar las diferencias de tiempo obtenidas a partir de la última fórmula y comparar con los límites de detección de los instrumentos. De hecho, este experimento fue posible debido notable disminución en el tamaño asociado a los relojes atómicos y, por supuesto, su exactitud.

El viaje lo suponemos sin escalas y, en una primera aproximación, el tiempo empleado es  $\tau_o = 2 \pi R \nu$ . Sustituyendo este valor en la ecuación tenemos:

$$\tau - \tau_o = \left[ \frac{2 \pi R g h}{c^2 |\nu|} - \frac{2 R \Omega \nu}{|\nu|} - \frac{|\nu|}{2} \right]$$

Teoría	Este	$40 \pm 23$ nanosegundos
	Oeste	$275 \pm 21$ nanosegundos
Experimento	Este	$59 \pm 10$ nanosegundos
	Oeste	$273 \pm 7$ nanosegundos

Estos resultados proporcionan un respaldo concreto a las predicciones de la teoría de la relatividad especial. La paradoja del reloj, que analizaremos más adelante, se comprueba aquí con el uso de relojes macroscópicos.

Anteriormente se conocía este resultado por el decaimiento de partículas elementales (ver ejemplo). En este último caso, la verificación es a nivel microscópico.

### V.4.1. Resumen

Hemos descrito un par de experimentos que no contradicen las predicciones de la teoría de la relatividad especial y general, ambas inventadas hace ya más de 70 años. El error en uno de estos experimentos confirma la teoría con una precisión de 70 partes por millón (70 ppm).

Aún así no es posible afirmar que, una de ellas, la relatividad general es la teoría que describe correctamente el fenómeno de gravitación: estos experimentos fueron realizados en la superficie de la tierra y aquí el campo gravitacional es muy débil. Existe al menos un experimento que confirma las predicciones de la relatividad general en el límite de campos fuertes, pero nos referiremos a él más adelante.

¿Qué significa físicamente un campo gravitacional débil o fuerte?

Si la masa de una estrella cualquiera la designamos con  $M_*$  y su radio es  $R_*$ , entonces una medida de la intensidad del campo gravitacional se obtiene a partir de la siguiente expresión:

$$\text{Si } \frac{GM}{c^2} \leq r_* \leq 100 \frac{GM}{c^2}, \quad \text{campo gravitacional fuerte.} \quad (\text{V.37})$$

$$\text{Si } r_* \gg 100 \frac{GM}{c^2}, \quad \text{el campo es débil.}$$

Donde  $G$  es la constante gravitacional y  $c^2$  es la velocidad de la luz. La dimensión de  $\left[ \frac{GM}{c^2} \right]$  es longitud.

Si  $M = M_{\odot} \equiv$  masa del sol  $= 1,9 \times 10^{33}$  gr, entonces:  $\frac{GM_{\odot}}{c^2} = 1,477 \times 10^5$  cm.

Por otra parte, el funcionamiento del instrumento denominado GPS (ver capítulo de cinemática) ha permitido comprobar la bondad de estas teorías -relatividad especial y general. Los relojes atómicos deben ajustar sus tiempos de acuerdo a su altura (relatividad general) y velocidad (relatividad especial) para mantener la sincronía con los relojes en tierra. Como se ha comprobado, el no hacerlo, arruina la precisión en la localización de un objeto en materia de horas.

### Ejemplo

Existe una constante  $h$ , que se denomina la constante de Planck y que caracteriza los fenómenos cuánticos, es decir el comportamiento del mundo microscópico. Su valor es

$$\hbar \equiv \frac{h}{2\pi} = 1,055 \times 10^{-34} \quad \text{[Joule-segundo]}.$$

Encuentre una cantidad que tenga dimensiones de **longitud** y en la cual intervengan además, las constantes  $G$  y  $c$ . Esta cantidad es la longitud de Planck.

Respuesta:

$$\sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} = 1,616 \times 10^{-33} \quad \text{cm} \quad (\text{V.38})$$

$$(\text{V.39})$$

La dimensión de  $h$  es [momentum  $\times$  distancia].

## V.5. Ejercicios Propuestos

- 1.- Un electrón de alta energía colisiona con otro electrón atómico. ¿Cuál es la mínima energía necesaria del electrón incidente para producir un par electrón - positrón?

La reacción considerada es:  $e^- + e^- \rightarrow e^- + e^- + (e^- + e^+)$ . La energía del electrón incidente es, presumiblemente, muy alta, de modo que podemos considerar el electrón atómico como en reposo.

- 2.- Considere un sistema de referencia  $S'$  en movimiento con velocidad  $\beta_1$  en la dirección del eje  $\hat{x}$ , con respecto a otro sistema inercial que denominamos  $S$ . Un tercer sistema de

referencia,  $S''$ , se desliza en la dirección de  $\hat{y}$  con velocidad  $\beta_2$  con respecto a  $S'$ . Encuentre la matriz de transformación  $[M^\mu_\nu]$  entre las coordenadas  $x''$  en  $S''$  y  $x$  en  $S$  tal que

$$x''^\mu = M^\mu_\nu x^\nu$$

Observe que la matriz  $M$  no representa una transformación pura de Lorentz. En el sistema  $S$  defina un sistema  $\bar{S}$ , rotado en un ángulo  $\alpha$  alrededor de  $\hat{z}$  con respecto a  $S$ . Determine el valor de  $\alpha$  que permite relacionar  $\bar{x}$  con  $x''$  mediante una transformación pura de Lorentz.

- 3.- En ausencia de gravedad se lanza una partícula con velocidad  $V_o$  con respecto al sistema de referencia  $S$ . La dirección de la partícula forma un ángulo  $\theta$  (menor que  $90^\circ$ ) con respecto al eje  $\hat{x}$ . Un observador ( $O'$ ) se desplaza en el sistema  $S$  con una velocidad  $V$  hacia la izquierda del eje  $\hat{x}$ . Calcule el ángulo y la velocidad de lanzamiento de la bala desde el punto de vista del observador  $O'$ .
- 4.- Este ejercicio constituye la base conceptual del fenómeno denominado precesión de Thomas, que ocurre cuando existe un electrón orbitando alrededor del núcleo. En este caso el vector rotado es el spin.

Suponga que Ud. está en una nave, solitario en el espacio. Sólo tiene a una estrella de referencia. Haciendo funcionar los motores iónicos de la nave Ud. puede adquirir un momentum en diferentes direcciones. Tomaremos la estrella como referencia, por ejemplo, si Ud. se da una velocidad  $(-V_o)$  en el eje  $x$ , (un boost en la dirección  $-x$  con velocidad  $V_o$ ) la estrella parecerá moverse en la dirección  $+x$ , con una velocidad  $V_o$ .

a.- Usando las transformaciones de Lorentz correspondientes, aplique al momentum inicial de un objeto en reposo, un impulso (un boost) en la dirección  $+x$  y posteriormente un impulso igual en la dirección  $+y$ . Ambas con la misma velocidad  $V_o$ . El momentum inicial al cual se aplican sucesivamente estas dos transformaciones de Lorentz es:  $p_\mu = (mc, 0, 0, 0)$ .

i.- Demuestre que el momentum final No apunta en la dirección esperada:  $45^\circ$  con la dirección inicial. (La estrella NO se mueve en la dirección esperada).

ii.- Encuentre un valor para la velocidad del impulso en la dirección "y",  $V_1$  tal que la estrella se mueva en la dirección esperada.

b.- Demuestre que una serie de 4 transformaciones de Lorentz: ( $V_o$ ) en el eje  $x$ , ( $V_1$ ) en el eje  $y$ ,  $(-V_1)$  en el eje  $x$ ,  $(-V_o)$  en el eje  $y$ , actuando sobre el vector inicial dejan a la estrella nuevamente en reposo.

c.- Suponga que otra nave espacial se mueve con respecto a la nuestra en la dirección  $x$  con un momentum dado por:  $p_\mu = (Mc, Mv_{esp}, 0, 0)$ . Demuestre que aplicando estas 4 transformaciones no se llega al mismo momentum final. Encuéntrelo.

d.- Demuestre que el invariante del momentum final obtenido en el paso anterior, es el mismo que el exhibido antes de las transformaciones de Lorentz realizadas. Muestre que en el proceso de estas 4 transformaciones de Lorentz el vector momentum experimentó una rotación espacial neta.

5.- En cada uno de los siguientes casos escriba el cuadrivector momentum  $p^\mu = [E/c, p_x, p_y, p_z]$

a.- Una partícula se mueve en la dirección  $x$  con una energía cinética  $T = m c^2$ .

b.- Una partícula que se mueve en la dirección negativa del eje  $x$  con una energía total  $E = 4 m c^2$ .

La partícula considerada en ambos casos tiene masa propia igual a  $m$ . La definición de energía cinética  $T$  está definida como:  $T \equiv m c^2 [\gamma - 1]$  donde  $\gamma = 1/\sqrt{1 - (V/c)^2}$

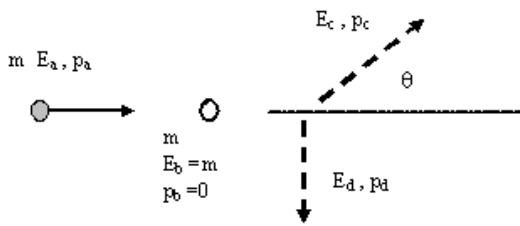


Figura V.11:

6.- Un positrón de masa  $m$  y energía cinética  $T = m c^2$  colisiona con un electrón en reposo. En estos casos estas dos partículas se aniquilan produciendo dos partículas de masa nula y alta energía, lo que hemos denominado como fotones. Uno de estos fotones viaja en  $90^\circ$  con respecto a la dirección original del positrón.

a.- Demuestre que las ecuaciones de conservación del momentum y la energía para esta reacción son:

$$E_c + E_d = 3m c^2, \quad \text{y} \quad c p_a = E_c \cos \theta, \quad E_d = E_c \sin \theta.$$

b.- ¿Cuál es la energía  $E_c$  y  $E_d$  de cada uno de los fotones? Respuesta:  $E_c = 2m c^2$  y  $E_d = m c^2$ .

c.- ¿Cuál es el valor del ángulo  $\theta$  que determina la dirección del segundo fotón? Respuesta:  $\sin \theta = 1/2$ .

7.– Considere la siguiente definición de un tensor de proyección:

$$P^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - \frac{u^\mu u^\nu}{c^2}$$

donde  $u^\mu$  es la cuadrivelocidad.

i) Demuestre que  $P^{\mu\nu}$  es un tensor, o sea,

$$P'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta P^{\alpha\beta}$$

ii) Calcule y demuestre que  $P^\mu_\nu P^\nu_\mu = \text{inv.}$

iii) Demuestre que  $P$  es un operador de proyección, o sea,  $(P \cdot P)^\mu_\nu = P^\mu_\nu$ .

8.– Un observador ( $S$ ) en reposo con respecto a la esfera celeste ve una distribución isotrópica de estrellas, es decir:

$$dN = \frac{N_o}{4\pi} d\Omega(\theta, \phi)$$

con  $N_o$  el número de estrellas observables. Otro observador ( $S'$ ) se mueve con velocidad  $\beta$  con respecto al anterior. Determine la distribución de objetos estelares  $dN'/d\Omega'$  visto desde  $S'$  y grafique en función de  $\theta'$ . Verifique que

$$\int_{Esfera} dN' = N_o$$

Sugerencia: elegir eje azimutal esférico paralelo al eje del movimiento relativo.

9.– Un átomo de masa  $M$  experimenta una transición interna y emite un fotón. Si el átomo ha disminuido su energía en  $\Delta E$ , calcule la frecuencia del fotón emitido en el sistema en que el átomo estaba inicialmente en reposo.

10.– Calcule la energía máxima que puede acarrear la partícula de masa  $m_1$  en la desintegración  $M \rightarrow m_1 + m_2 + m_3$ .

11.– Calcule la energía umbral del nucleón  $N$  ( $m_N \sim 940$  MeV) para que sea posible la reacción  $\gamma + N \rightarrow N + \pi$ . Los fotones ( $\gamma$ ) de temperatura  $T \sim 3^\circ\text{K}$  ( $E_\gamma = kT$ ) chocan frontalmente con los nucleones.

12.– Para la reacción  $\pi^+ + n \rightarrow K^+ + \Lambda^0$ , calcule la energía umbral del pión ( $\pi$ ) para crear un kaón ( $K^+$ ) emergiendo a  $90^\circ$  c/r dirección incidente en el sistema del laboratorio. En el sistema de laboratorio el neutrón ( $n$ ) está en reposo. Considere  $m_\pi = 140$  MeV,  $m_n = 940$  MeV y  $m_\Lambda = 1115$  MeV.

- 13.- En la figura se muestra la colisión elástica de un electrón con un núcleo. La energía del electrón incidente es  $E$ . Sea  $E'$  la energía del electrón emergente a un ángulo  $\theta$  con respecto a la del haz incidente. Demuestre que

$$E' = \frac{E}{1 + \frac{E}{Mc^2}(1 - \cos \theta)}$$

Grafique  $E'/E$  como función de  $\theta$  para electrones con energía de 10 GeV incidiendo sobre protones ( $m_p \sim 940$  MeV) y sobre un núcleo de  $A = 50$  nucleones ( $M \sim A \times 940$  MeV). Compare ambos casos.

- 14.- Considere la siguiente reacción:  $\pi^+ + n \implies K^+ + \Lambda^0$ . Encuentre la energía cinética umbral de la partícula  $\pi$  que es capaz de crear un kaón  $K$  en un ángulo de  $90^\circ$  en el sistema de laboratorio y suponiendo que  $n$  está en reposo en el laboratorio.  $m_\pi = 140$  Mev,  $m_n = 940$  Mev,  $m_K = 494$  Mev,  $m_\Lambda = 1115$  Mev.

Indicaciones: (Úselas si a Ud. le acomodan. No es la única manera de hacerlo.)

Trabaje en el sistema de Laboratorio. Usando el invariante asociado a la partícula  $\lambda$ , remueva el momentum y su energía de las ecuaciones utilizando su invariante y las ecuaciones de conservación. Encuentre que:  $E_\pi = \frac{m_\Lambda^2 - m_\pi^2 - m_n^2 - m_K^2 + 2m_n E_K}{2(m_n - E_K)}$ . Para encontrar el umbral debe minimizar  $E_K$ . Introduzca números sólo al final.

- 15.- Calcule la velocidad con la que se debe acercar una fuente de luz roja ( $\lambda_r = 6500 \text{ \AA}$ ) para verla verde ( $\lambda_v = 5300 \text{ \AA}$ ).
- 16.- Un cohete no relativista eyecta gases con velocidad  $a$  relativo al cohete. Demuestre que la ecuación del movimiento del cohete es

$$m \frac{dv}{dt} = -a \frac{dm}{dt}$$

- 17.- En el caso del cohete anterior y en régimen relativista conservación de masa no es aplicable. Demuestre que en este caso la ecuación del movimiento se modifica a la siguiente:

$$m \frac{dv}{dt} + a \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = 0$$

Demuestre entonces que

$$\beta = \frac{1 + \left( \frac{m}{m_0} \right)^{\frac{2a}{c}}}{1 - \left( \frac{m}{m_0} \right)^{\frac{2a}{c}}}$$

18.- Lleve a su forma explícita las siguientes ecuaciones covariantes:

a)  $\partial_\mu j^\mu = 0$

b)  $\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\mu$

c)  $\partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu} = 0$

Aquí  $j^\mu = \rho u^\mu$  representa la cuadricorriente, con  $\rho$  la densidad de carga en el sistema en reposo de las cargas, y  $u^\mu$  la cuadrivelocidad de las cargas. Además debemos recordar que el tensor electromagnético fué definido como

$$[F^{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ \cdot & 0 & -B_3 & B_2 \\ \cdot & \cdot & 0 & -B_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix}, \quad [F_{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ \cdot & 0 & -B_3 & B_2 \\ \cdot & \cdot & 0 & -B_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix}$$

19.- Para una esfera de densidad de masa uniforme que rota con la máxima velocidad angular permisible, calcule su momento angular y energía. Si la energía de este sistema rotante se asocia a su masa en reposo y su radio se iguala a la longitud de onda de Compton del sistema, determine el momentum angular en función de  $\hbar$ .

20.- Defínase una fotografía perfecta de la siguiente forma: i.- los fotones de la fuente llegan en forma paralela a la placa fotográfica; ii.- los fotones que se imprimen son los que llegan perpendiculares a la placa; iii.- los fotones que se imprimen son los que llegan simultáneamente a la placa en el instante de obturación; y iv.- sobre la placa se imprime una imagen de tamaño natural. Demuestre que la fotografía perfecta de un cubo con movimiento paralelo a la placa es la misma que se obtendría a si el cubo está en reposo con respecto a la placa, pero rotado en cierto ángulo. Determine el ángulo de rotación.



# Bibliografía

- [1] **Spacetime Physics**, 1966, R. Taylor and J. A. Wheeler, W. H. Freeman and Company.
- [2] **Problem Book in relativity and Gravitation**, 1975, A. Lightman, W. Press, R. Price and S. Teukolky, Princeton University Press, Princeton, New Jersey.
- [3] **Gravity, An Introduction to Einstein's general Relativity**, James B. Hartle, Addison Wesley, San Francisco, 2003.
- [4] **Espacio, tiempo y Gravitación**, R. Wald, Fondo de Cultura Económica # 14315.
- [5] **Gravitation**, C. Misner, K. Thorne and J. A. Wheeler, 1972, W. H. Freeman.
- [6] **Conceptos de Relatividad y Teoría Cuántica**, R. Resnik. 1976, Ed. Limusa, México.
- [7] **The Emperor's New Mind**, Concerning Computers, Minds and the Laws of Physics, Roger Penrose, 1991, Penguin Book.
- [8] **Black Holes and Time Warps: Einstein outrageous legacy**, K. Thorne, 1994, W. W. Norton & Company.
- [9] **Elementary particles: A short history of some discoveries in Atomic Physics**. Ch. N. Yang, Princeton University press, 1962.
- [10] **Quarks, Leptons and Gauge Fields**, K. Huang, World Scientific Publishing Co. Pte Ltd., 1982, Singapore National Printers.
- [11] **Test of relativistic gravitation with a space-borne hydrogen maser**, R. F. C. Vessot et al., 1980, Phys. Rev. Lett., 45, page 2081.
- [12] **Around the world Atomic clocks: Predicted and Observed Relativistic time gains**, J. C. Hafele y R. E. Keating, Science, 177, 166, 1972, pag 166.
- [13] 1979, A. Brillet and J. L. Hall, Phys. Rev. Lett. 42, 549.

- [14] Improved Kennedy–Thorndike Experiment to test Special Relativity, 1990, D. Hils and J. L. Hall, Phys. Rev. Lett. 64, page 1697.**