

Auxiliar 8: Markov Continuo

Martes 20 de Octubre de 2009

Problema 1

La oficina de Entrega de Certificados de una prestigiosa Escuela de Ingeniería, ha contratado una muy agraciada secretaria, la cual causa sensación dentro del alumnado masculino. Es por esto que se le ha encargado a ud. el estudio del sistema de atención con el que actualmente se opera.

En la oficina, sólo existe un puesto de espera, además del lugar que ocupa el estudiante que se está atendiendo. Los alumnos que llegan y encuentran, tanto a la secretaria como el lugar de espera ocupados, se retiran indignados.

Los estudiantes llegan a pedir certificados según un proceso de Poisson de tasa λ [alumnos/hora]. Con probabilidad p un alumno es hombre, y con $1 - p$, mujer.

La secretaria demora en la atención, un tiempo aleatorio que sigue una distribución exponencial de media $\frac{1}{\mu}$ para los hombres y $\frac{1}{\gamma}$ para las mujeres, con $\mu \leq \gamma$.

Además se sabe que las alumnas, víctimas de una irrefrenable envidia, están como máximo en el lugar de espera un tiempo que sigue una distribución exponencial de parámetro β , luego del cual se retiran furiosas, sin haber recibido la atención. Por otro lado si un estudiante hombre está en el puesto de espera, ni tonto ni perezoso, se queda en ese lugar hasta que la afamada secretaria se desocupe y le preste el servicio requerido.

1. Modele el estado de ocupación de la Oficina de Certificados como una Cadena de Markov en tiempo continuo.
2. Justifique la existencia de probabilidades estacionarias y plantee el sistema de ecuaciones que permitirían calcularlas.
3. Suponiendo conocidas las probabilidades estacionarias y que el sistema lleva operando por “mucho tiempo”, responda las siguientes preguntas:
 - a) ¿Cuál es la cantidad de alumnos (en total) que, en una hora, se retiran indignados al encontrar la oficina llena?
 - b) Si un hombre llega y logra entrar al sistema, en promedio cuánto tiempo tendrá que esperar hasta ser atendido?
 - c) ¿Cuál es la probabilidad de que una mujer se retire indignada del lugar de espera, antes de que termine la atención de la persona que está con la secretaria?

Problema 2

Cierta unidad académica dispone de 2 equipos de proyección *data show* que son utilizados para realizar presentaciones en actividades de docencia. Los equipos difieren en cuanto a la nitidez y potencia de la imagen que proyectan, siendo uno de ellos de alta calidad y otro de baja calidad. Los equipos son administrados por el Encargado de Sistemas.

Los profesores, auxiliares y alumnos solicitan los equipos en el momento que los necesitan para realizar una presentación. El Encargado de Sistemas ha observado que se reciben solicitudes de acuerdo a un proceso Poisson de tasa α [solicitudes/hora]. Cuando una persona pide un data show se le entrega el mejor equipo disponible en ese momento. Si no hay equipos disponibles (ambos equipos han sido prestados a otros expositores) la solicitud es rechazada, y la persona que deseaba el data show se va desilusionada a realizar su presentación con medios menos sofisticados.

Una presentación tiene una duración aleatoria, exponencialmente distribuida con media $\frac{1}{\beta}$ [horas]. Al terminar su presentación el expositor devuelve el data show inmediatamente al Encargado de Sistemas.

Se sabe además que el equipo de baja calidad falla ocasionalmente. El tiempo que permanece en operación hasta fallar es una variable aleatoria exponencialmente distribuida con tasa γ [fallas/hora]. Cuando el equipo falla durante una presentación el expositor llama inmediatamente al Encargado de Sistemas, el cual envía el equipo a reparación. El accidentado expositor continúa después su presentación como mejor pueda. Un equipo nunca falla cuando no está siendo utilizado. La reparación de un data show toma un tiempo exponencialmente distribuido con media $\frac{1}{\delta}$ [horas]. Una vez reparado el equipo es recibido por el Encargado de Sistemas, quedando disponible para quien lo solicite.

1. Formule un modelo de Markov en tiempo continuo que describa la disponibilidad de equipos data show de alta y baja calidad. Justifique la existencia de una ley de probabilidades estacionarias e indique cómo calcularlas (no es necesario que las calcule).
- 2.Cuál es el número medio de solicitudes rechazadas por unidad de tiempo en el largo plazo? (responda en términos de las probabilidades estacionarias y los demás parámetros del problema).
3. ¿En el largo plazo, cuál es la tasa de utilización de cada uno de los equipos (fracción de su tiempo que son usados)?
4. Si a un expositor le acaban de prestar el data show de baja calidad, ¿cuál es la probabilidad que alcance a terminar su presentación sin que el equipo falle?

Problema 3

Un recorrido de buses pasa por un paradero según un proceso de poisson de tasa λ . Los pasajeros llegan al paradero según un proceso de poisson de tasa μ . Podemos suponer que el bus tiene suficiente capacidad para que todos los pasajeros esperándolo se suban.

1. Sea π_k la probabilidad que en estado estacionario hayan k personas esperando en el paradero. Calcule π_k para todo k .
2. Calcule el tiempo promedio de espera de un pasajero en el paradero.
3. ¿Cuál es el número esperado de personas en el paradero?

Problema 4

Usted ha decidido instalarse con un negocio para lustrar zapatos. El establecimiento consta de dos sillas. En la silla 1 los zapatos del cliente son limpiados y embetunados, para luego pasar a la silla 2, donde se les saca el brillo. Los tiempos de servicio en las dos sillas son variables aleatorias independientes, exponencialmente distribuidas de tasas μ_1 y μ_2 respectivamente. Considere que los clientes potenciales tienen tiempos de llegada exponenciales de tasa λ y que el cliente sólo entra al establecimiento si las dos sillas están desocupadas.

1. Modele el problema anterior como una cadena de Markov en tiempo continuo.
Suponga que ahora un ayudante es contratado y cada uno trabaja en una silla. Considere el mismo problema anterior, pero ahora un cliente potencial entra al negocio si la silla 1 está vacía. Cuando el trabajo en la silla 1 se termina, pasa a la silla 2 si está vacía o espera en la 1 hasta que la 2 se desocupe.
2. Modele el nuevo problema como una cadena de Markov en tiempo continuo. ¿Por qué puede hacerlo ?.
3. ¿Qué proporción de clientes potenciales entran al establecimiento ?.
4. ¿Cuál es la tasa promedio de entrada de clientes al negocio ?.
5. ¿Cuál es el número promedio de clientes dentro del negocio ?.
6. En promedio, ¿cuánto tiempo pasa un cliente que entra al local, dentro de éste?.