

## Auxiliar 11: Redes de Colas y Markov con Decisiones

Martes 17 de Noviembre de 2009

### Problema 1

Un servicio que provee información geográfica y climatológica a través de internet recibe una demanda descrita por un proceso de Poisson de tasa  $\lambda$ . Cada usuario que ingresa al sistema es atendido por un único servidor el cual determina si la información requerida es geográfica (lo que sucede con probabilidad  $p_1$ ), climatológica (lo que sucede con probabilidad  $p_2$ ) o si el servidor no es el adecuado para atender al usuario, en cuyo caso el usuario sale del sistema. Esta operación demora un tiempo exponencialmente distribuido de media  $1/\mu_1$ . Si un usuario que llega encuentra al servidor ocupado, se coloca en cola.

Un usuario que requiere información geográfica, pasa a una segunda etapa, en que un único servidor realiza las atenciones, las que demoran un tiempo exponencialmente distribuido de media  $1/\mu_2$ . De la misma manera, un usuario que requiere información climatológica, pasa a otro servidor, el que demora un tiempo exponencialmente distribuido de media  $1/\mu_3$  en atender una consulta. Si un usuario que llega encuentra cualquiera de estos servidores ocupados, se coloca en la cola correspondiente.

Un usuario que realizó una consulta geográfica, con probabilidad  $q$ , además, requiere consultar acerca del clima y pasa al servidor climatológico, después de terminar su atención. Análogamente, un usuario que realizó una consulta climatológica, con probabilidad  $r$ , además, requiere una consulta geográfica, por lo que al finalizar esta pasa al servidor geográfico. Ningún usuario realiza más de dos consultas. Luego de realizar su(s) consulta(s), los usuarios salen del sistema.

1. Modele el servicio anteriormente descrito como una red de colas. Calcule las tasas efectivas de entrada a cada sistema y escriba las condiciones de estado estacionario.
2. Calcule el número promedio de usuarios dentro del sistema completo en estado estacionario.
3. Calcule el tiempo promedio que pasa un usuario dentro del sistema en estado estacionario.
4. Suponga que el servidor percibe un costo por hacer esperar a los clientes, el cual es igual a  $C_w$  por unidad de tiempo que está un cliente dentro del sistema. Además, existen costos por unidad de tiempo  $C_i(\mu_i)$  asociados a brindar tasas de atención  $\mu_1, \mu_2$  y  $\mu_3$ , respectivamente. Formule un problema de optimización que permita encontrar las tasas óptimas de atención, que minimicen el costo total por unidad de tiempo en el estado estacionario.

### Problema 2

El Departamento de Control de Calidad de una empresa manufacturera recibe productos provenientes de distintas líneas de producción. Éstos son analizados por un inspector de calidad quien identifica qué productos presentan fallas, y los clasifica en buenos, con fallas menores (características estéticas) o con fallas graves. El tiempo que le toma a este empleado inspeccionar los productos se distribuye exponencialmente con media  $1/\mu_1$  [horas]. Los productos a inspeccionar llegan de acuerdo a un proceso de Poisson de tasa  $\lambda$  [unidades/hora], siendo un 10 % calificados con falla menores y 5 % con fallas graves. Los productos buenos son enviados inmediatamente a la bodega.

Como segundo paso, los productos que presentan fallas deben ser analizados por un laboratorista para identificar las causas de sus defectos. Los productos con fallas menores son analizados por un especialista, quien demora un tiempo exponencialmente distribuido con media  $1/\mu_2$  [horas] en su análisis. Los productos con fallas graves son analizados por uno de los dos ingenieros con que cuenta el departamento, cada uno de los cuales demora un tiempo exponencialmente distribuido con media  $1/\mu_3$  [horas] en revisar un producto.

Por otro lado, el 20 % de los productos analizados por fallas graves son enviados al especialista encargado de revisar las características estéticas, por considerar que los defectos que presentan no son realmente graves, sino menores.

Luego de todos los análisis, un producto que presentó fallas es enviado junto con el informe de calidad respectivo, al jefe del departamento de calidad quien demora un tiempo exponencialmente distribuido con media  $1/\mu_4$  [horas] en revisar el informe, luego de lo cual envía el producto a la bodega de productos defectuosos.

1. Modele el sistema de control de calidad de la empresa como un sistema de colas, indicando el modelo que usará para cada estación y los parámetros asociados.
2. ¿Qué relaciones deben satisfacer  $\lambda$ ,  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ ,  $\mu_3$  y  $\mu_4$  para que el sistema alcance estado estacionario?
3. ¿Qué fracción de los productos que llegan al departamento son analizadas por el especialista en fallas menores?
4. En promedio, ¿cuánto tiempo pasa en el sistema un producto que llega al departamento de calidad de la empresa?
5. Suponga que el inspector decide no admitir más de 50 productos para su revisión, y que pasado ese límite cualquier producto que llegue lo transferirá directamente a los ingenieros especialistas en fallas graves. Con este cambio, ¿puede modelar el sistema de control de calidad con los modelos estudiados en el curso? Justifique.
6. Suponga que la empresa quiere disminuir en lo máximo posible el tiempo que demora el departamento en determinar la causa de un defecto en los productos analizados. Para esto, ha decidido contratar más especialistas en atributos. Entregue una cota superior (lo más pequeña posible) para la disminución que se puede lograr.

### Problema 3

El taller mecánico de una prestigiosa marca de automóviles recibe clientes según un Proceso de Poisson de tasa  $\lambda$  [clientes/hora]. En la **entrada** del taller los clientes esperan que tanto sus datos como los del auto sean ingresados en el sistema de registros que maneja la empresa. Esta labor es realizada por un único empleado que demora un tiempo exponencialmente distribuido de media  $\frac{1}{\mu_1}$  [horas] en digitar los datos.

Un automóvil ya registrado es conducido hasta una **zona de diagnóstico**, donde espera para ser revisado por el supervisor del taller. El tiempo que demora éste en revisar un auto y determinar el procedimiento a seguir se distribuye exponencialmente con media  $\frac{1}{\mu_2}$  [horas]. El supervisor sabe que una fracción  $r$  de los autos que revisa por primera vez deben ser conducidos hasta la **zona de mantención de rutina** mientras que el resto pasa a ser reparado por **mecánicos especializados**.

El área de mecánica especializada cuenta con dos empleados, cada uno de los cuales demora un tiempo distribuido exponencialmente de media  $\frac{1}{\mu_3}$  [horas] en reparar un auto. Una fracción  $s$  de los autos reparados por el personal especializado, independiente de todo lo demás, es llevada directamente a la **zona de salida**, el resto debe entrar nuevamente al área de mecánica especializada por seguir presentando fallas.

Por su parte, cualquiera de los dos empleados asignados al área de mantención rutinaria tarda un tiempo distribuido exponencialmente de media  $\frac{1}{\mu_4}$  [horas] en realizar la mantención de un automóvil. Además, se sabe que estos operadores envían a una fracción  $t$  de los autos que revisan a un nuevo diagnóstico por parte del supervisor, mientras que el resto es enviado a la zona de salida. En la segunda revisión, que al igual que la primera demora un tiempo aleatorio exponencialmente distribuido de tasa  $\mu_2$ , el auto con probabilidad  $e$  es enviado a la zona de mecánica especializada y con probabilidad  $1 - e$  es enviado a la zona de salida.

En la zona de salida existe una máquina de lavado, que permite atender a un automóvil a la vez, la cual demora un tiempo exponencialmente distribuido de media  $\frac{1}{\mu_5}$  [horas] en limpiar un auto, dejándolo listo para su entrega al cliente.

1. Modele el sistema descrito como una red de colas, indicando a que tipo de sistema de espera (notación de Kendall) corresponde cada uno de los subsistema descritos. Determine las tasas efectivas para cada subsistema y las condiciones para que exista estado estacionario. Justifique su respuesta.

2. En el largo plazo, ¿qué fracción de los autos reparados por mecánicos especializados ha sido revisado en la zona de mantención rutinaria?
3. Suponga que la totalidad de los autos que son llevados al taller por una falla grave son conducidos a la zona de mecánica especializada luego del diagnóstico del supervisor. ¿Cuánto deberá esperar en promedio un cliente que lleva su auto por este tipo de problema?

## Problema 4

Suponga que usted trabaja en el Departamento de Marketing de una importante empresa cervecera y está encargado de decidir la política óptima de avisaje publicitario televisivo de esta compañía. Esto significa que usted debe decidir mes a mes, si contratar publicidad televisiva o si no hacerlo.

Las ventas mensuales de la empresa pueden ser altas, medianas o bajas y los beneficios asociados son 5, 3, 1 Millones US\$ respectivamente. El costo de la publicidad televisiva alcanza los 2 Millones US\$.

Existen probabilidades de pasar de un estado de ventas a otro mensualmente, que sólo dependen del estado actual. Además, estas probabilidades son distintas para el caso en se realiza la publicidad y para el que no se hace. Las siguientes matrices describen este comportamiento evolutivo:

Con Publicidad:

	<i>A</i>	<i>M</i>	<i>B</i>
<i>A</i>	0,5	0,3	0,2
<i>M</i>	0,4	0,4	0,2
<i>B</i>	0,4	0,6	0

Sin Publicidad:

	<i>A</i>	<i>M</i>	<i>B</i>
<i>A</i>	0,2	0,5	0,3
<i>M</i>	0,1	0,4	0,5
<i>B</i>	0	0,3	0,7

1. Para cada acción, modele el problema como una Cadena de Markov con beneficios.
2. Resuelva el problema utilizando Markov con decisiones, para el caso de horizonte finito de  $K$  períodos. Suponga que los valores residuales son 3, 1, -1 Millones US \$ para los estados Alta, Media, Baja, respectivamente.
3. Resuelva el problema utilizando Markov con decisiones, para el caso de horizonte infinito.