Pauta Examen

Problema 1

En una granja del sur de chile se quiere encontrar la política óptima de reemplazo de vacas lecheras. Al final de cada período semestral se observa la productividad de una vaca, la que puede ser alta, media, o baja. Los ingresos naturalmente dependen de la productividad y son de 0, 100, 200 mil pesos si la productividad es baja, media o alta respectivamente. Al final de cada período se puede decidir mantener o reemplazar la vaca. Si la vaca se mantiene, su productividad en el siguiente período se distribuye de acuerdo a la siguiente tabla:

Mantener	Baja	Media	Alta
Baja	0.6	0.3	0.1
Media	0.2	0.6	0.2
Alta	0.1	0.3	0.6

Por otra parte, reemplazar la vaca tiene un costo asociado de 100 mil pesos, y la productividad de una vaca nueva se distribuye equiprobablemente, es decir, su productividad es alta, media, o baja con probabilidad 1/3.

a) (1.5 puntos) Modele la situación como un proceso de decisión markoviano donde se quiere maximizar las ganancias medias estacionarias por período.

Estados = productividad de la vaca = {Baja, Media, Alta}
Acciones = {Mantener, Reemplazar}

$$P(M) = \begin{bmatrix} 0,6 & 0,3 & 0,1 \\ 0,2 & 0,6 & 0,2 \\ 0,1 & 0,3 & 0,6 \end{bmatrix}, \quad \hat{r}(M) = \begin{pmatrix} 0 \\ 100 \\ 200 \end{pmatrix}$$

$$P(R) = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{r}(R) = \begin{pmatrix} -100 \\ 0 \\ 100 \end{pmatrix}$$

$$V(k,M) = \begin{pmatrix} 0 \\ 100 \\ 200 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0,6 & 0,3 & 0,1 \\ 0,2 & 0,6 & 0,2 \\ 0,1 & 0,3 & 0,6 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_B^*(k-1) \\ V_M^*(k-1) \\ V_A^*(k-1) \end{pmatrix}$$

$$V(k,R) = \begin{pmatrix} -100 \\ 0 \\ 100 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_B^*(k-1) \\ V_M^*(k-1) \\ V_A^*(k-1) \end{pmatrix}$$

Luego, se tiene que en cada periodo k se debe elegir la acción que maximice el beneficio esperado para lo que queda del periodo.

$$V_i^*(k) = \max_{\{M,R\}} \{V_i(k,M), \quad V_i(k,R)\}$$

b) (3.0 puntos) Usando el algoritmo de Howard encuentre la política óptima de reemplazo de vacas, y calcule las ganancias medias por período en el largo plazo.

Para aplicar el algoritmo de Howard se debe elegir una política de decisiones y encontrar los w´s y el g asociado. Se intentará con la política (*M,M,M*) ya que se observa que el beneficio esperado de realizar una transición desde cualquier estado es mayor al mantener la vaca que al reemplazarla ($\hat{r}_i(M) > \hat{r}_i(R) \quad \forall i$).

$$\Rightarrow \quad P = \begin{bmatrix} 0{,}6 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}6 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}6 \end{bmatrix}, \quad \hat{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 100 \\ 200 \end{pmatrix}$$

El sistema a resolver es entonces:

$$\Rightarrow \quad W + g = \hat{r} + PW \quad \Leftrightarrow \quad (I-P)W + g = \hat{r} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 0{,}4 & -0{,}3 & -0{,}1 & 1 \\ -0{,}2 & 0{,}4 & -0{,}2 & 1 \\ -0{,}1 & -0{,}3 & 0{,}4 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 100 \\ 200 \end{pmatrix}$$

Definiendo $w_3 = 0$ se tiene que:

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ g \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}4 & -0{,}3 & 1 \\ -0{,}2 & 0{,}4 & 1 \\ -0{,}1 & -0{,}3 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 100 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -400 \\ -200 \\ 100 \end{pmatrix}$$

Reemplazando en $r(a) + P(a)W$ se tiene

$$r(M) + P(M)W = \begin{pmatrix} -300 \\ -100 \\ 100 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad r(R) + P(R)W = \begin{pmatrix} -300 \\ -200 \\ -100 \end{pmatrix}$$

se obiene que la política puede ser s_1 = (*M,M,M*) o s_2 = (*R,M,M*). Dado que s_1 es la misma política que nos definimos inicialmente, mantener la vaca en cualquier estado es política óptima del problema. Al iterar con (*R,M,M*) se obtiene que también es política óptima del problema. El beneficio de una transición en el largo plazo es $100.000.

c) (1.5 puntos) ¿Cuál es el número esperado de períodos que una vaca recién adquirida será ordeñada?

Si se obtuvo que la política óptima es (*M,M,M*), entonces la vaca no se reemplaza nunca.

Si se obtuvo (*R,M,M*), entonces se calcula el número esperado de transiciones para llegar desde cada estado al estado de baja productividad.

$$\Rightarrow \quad W + g = \hat{r} + PW \quad \Leftrightarrow \quad (I-P)W = \hat{r} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 0{,}\overline{6} & -0{,}\overline{3} & -0{,}\overline{3} \\ -0{,}2 & 0{,}4 & -0{,}2 \\ -0{,}1 & -0{,}3 & 0{,}4 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tomamos $w_1 = 0$ (no otro). Se despeja los otros w.

$$\begin{pmatrix} w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}4 & -0{,}2 \\ -0{,}3 & 0{,}4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Luego, dado que la vaca recién se cambia, entonces puede partir en cualquier estado equiprobablemente. Finalmente habrá que sumar un periodo por ordeñar la vaca cuando su productividad esta baja (que corresponde a la última vez que se ordeña).

Número esperado de transiciones = 1/3 (0+6+7) + 1 = 5,33

Problema 2

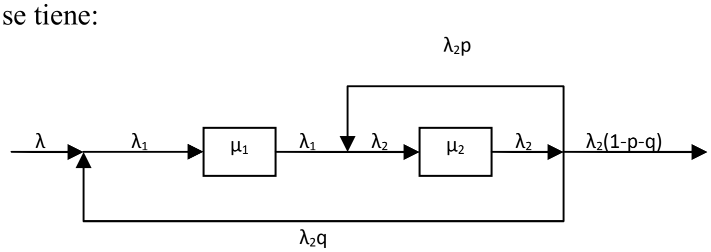
Un laboratorio ha diseñado un sofisticado examen para diagnosticar una enfermedad nueva. El examen procesa una muestra en dos etapas. Cada muestra se procesa primero en la etapa 1, lo que toma un tiempo exponencial de media $1/\mu_1$ A continuación, la muestra va a la etapa 2 que también toma un tiempo exponencial de proceso de media $1/\mu_2$.

Al finalizar la etapa 2 pueden ocurrir tres eventos. La información podría ser concluyente y el examen está terminado para esa muestra, lo que ocurre con probabilidad $1–p–q$. También podría ocurrir que la información obligue a repetir la etapa 2, y esto ocurre con probabilidad q. Finalmente, la información podría ser tan poco concluyente que obliga a repetir todo el proceso para esa muestra, incluyendo las etapas 1 y 2, esto ocurre con probabilidad p.

Las muestras llegan al laboratorio según un proceso de poisson de tasa λ.

a) (1.5 puntos) Modele esta situación como un sistema de redes de colas.

Sea λ_1 la tasa efectiva de llegada de muestras a la etapa 1 y λ_2 la tasa efectiva de llegada de muestras a la etapa 2. Entonces se tiene:



b) (1.5 puntos) Calcule las tasas efectivas de entrada a la etapa 1 y a la etapa 2.

Condiciones de equilibrio

$$\begin{aligned} &\lambda_1 = \lambda + \lambda_2 p \\ &\lambda_2 = \lambda_1 + \lambda_2 q \\ &\lambda = \lambda_2 (1 - p - q) \\ &\lambda_1 < \mu_1 \\ &\lambda_2 < \mu_2 \end{aligned}$$

con lo que se obtiene

$$\lambda_1 = \lambda \frac{1-q}{1-p-q}$$
$$\lambda_2 = \frac{\lambda}{(1-p-q)}$$

c) (1.5 puntos) Calcule el número esperado de exámenes tanto en la etapa 1 como en la etapa 2, en el largo plazo.

Dado que el proceso de atención en cada etapa es una M/M/1, usando Little en cada etapa se tiene:

$$L_i = \frac{\rho_i}{1-\rho_i}$$

por lo que el número de personas en cada etapa en el largo plazo es

$$L_1 = \frac{\lambda(1-q)}{\mu_1(1-p-q)-\lambda(1-q)} \quad \wedge \quad L_2 = \frac{\lambda}{\mu_2(1-p-q)-\lambda}$$

d) (1.5 puntos) Calcule el tiempo promedio que una muestra permanece en este examen.

$$w_T = \frac{L_1 + L_2}{\lambda} = \frac{1-q}{\mu_1(1-p-q)-\lambda(1-q)} + \frac{1}{\mu_2(1-p-q)-\lambda}$$

La otra forma era contar el número esperado de veces que se pasa por ambos subsistemas y luego multiplicar esas cantidades por los w´s de cada subsistema y sumar.

Sean Ni el número de veces que se pasa por el subsistema i en promedio. Entonces:

$$N_1 = \sum_{i=1}^{\infty} i\left(\frac{p}{1-q}\right)^{i-1}\frac{1-p-q}{1-q} = \frac{1-p-q}{1-q}\cdot\frac{q}{1-p}\sum_{i=1}^{\infty} i\left(\frac{p}{1-q}\right)^{i} = \frac{1-q}{1-p-q}$$
$$N_2 = \left[\sum_{i=1}^{\infty} iq^{i-1}(1-q)\right]\cdot N_1 = \frac{1}{1 \quad p \quad q}$$

Luego el tiempo en el sistema es:

$$W = N_1W_1 + N_2W_2 = \frac{1-q}{1-p-q}\cdot\frac{1}{\mu_1-\lambda_1} + \frac{1}{1-p-q}\cdot\frac{1}{\mu_2-\lambda_2}$$

Problema 3

Un determinado servicio telefónico recibe llamadas de acuerdo a un proceso de poisson de tasa λ =100 llamadas por hora. Cada cliente requiere un servicio A con probabilidad p y un servicio B con probabilidad $q = 1-p$.

a) (1.2 puntos) Dado que en las primeras 10 horas han llegado 1000 clientes, calcule la probabilidad que n hayan requerido el servicio B.

$$P(N_B(10)=n/N(10)=1000)=\binom{1000}{n}q^n(1-q)^{1000-n}$$

<u>OBS</u>: también se podía resolver desarrollando las expresiones, usando las propiedades de Poisson.

b) (1.2 puntos) Dado que en las primeras 10 horas han llegado 1000 clientes, calcule la probabilidad que n hayan requerido el servicio B en las primeras 4 horas.

$$P(N_B(4)=n/N(10)=1000)=\binom{1000}{n}(\frac{4}{10}q)^n(1-\frac{4}{10}q)^{1000-n}$$

c) (1.2 puntos) Calcule la densidad de T, el tiempo de llegada del primer cliente que requiere A.

Sea T_A el tiempo entre llegadas de los clientes de A. Se tiene que

$$N_A(t)\to Poisson(\lambda pt) \quad \Rightarrow \quad T_A\to \exp(\lambda p) \quad \Leftrightarrow \quad f_{T_B}(t)=\lambda pe^{-\lambda pt}$$

en particular para el tiempo de llegada del primer cliente de A.

d) (1.2 puntos) Encuentre la distribución del número de clientes que requieren el servicio A, que llegan antes del primer cliente que requiere B.

$$P(N_A(T_B)=k)=p^kq \quad \forall k\geq 0$$

e) (1.2 puntos) Calcule la probabilidad que n clientes requieran el servicio A antes que n clientes requieran el servicio B.

Sea S_n^A el tiempo de llegada del n-ésimo cliente de A. Se tiene que

$$\begin{aligned}
&P(S_n^A<S_n^B)\\
&=\int_0^\infty P(S_n^A<t)\cdot f_{S_n^B}(t)\cdot dt\\
&=\int_0^\infty\left(\int_0^t f_{S_n^A}(\tau)d\tau\right)\cdot f_{S_n^B}(t)dt\\
&=\int_0^\infty\int_0^t \frac{(\lambda p)e^{-\lambda p\tau}\cdot(\lambda p\tau)^{n-1}}{(n-1)!}\cdot\frac{(\lambda q)e^{-\lambda qt}\cdot(\lambda qt)^{n-1}}{(n-1)!}d\tau dt
\end{aligned}$$