Clase Auxiliar 3

Profesor: Jorge San Martín
Auxiliares: Francisco Jiménez - Ramiro Villagra

Resumen

- Derivada como aproximaciï¿½n lineal afin en $\bar{x}$

  $$f(x) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x}) + o(x - \bar{x})$$

  tal que

  $$\lim_{x \to \bar{x}} \frac{o(x - \bar{x})}{x - \bar{x}} = \lim_{h \to 0} \frac{o(h)}{h} = 0$$

- Derivada en un punto: diremos que la derivada de $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ en $\bar{x} \in (a, b)$ es:

  $$f'(\bar{x}) = \lim_{x \to \bar{x}} \frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}}$$

  o bien

  $$f'(\bar{x}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\bar{x} + h) - f(\bar{x})}{h}$$

- Algebra de derivadas:
  - $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
  - $(f \cdot g)(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
  - $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

- Regla de la cadena:

  $$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x)$$

- Funciones inversas:

  $$(f^{-1})(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

Ejercicios

P1 Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable tal que $f'(x) = af(x) \forall x \in \mathbb{R}$, con a constante.
Demostrar que $f(x) = f(0)e^{ax}$.
Indicación: considere $g(x) = e^{-ax}f(x)$.

P2 Sean f_i funciones de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (derivables), donde $i = 1, .., n$. Sean $G_n = f_1(f_2(...(f_n(x))...))$. Demuestre que:

$$G_n'(x) = \prod_{i=1}^{n} f_i'(f_{i+1}(f_{i+2}(...(f_n(x))...)))$$

P3 Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funciï¿½n tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq a(x - y)^2 \forall x, y \in \mathbb{R}$$

con $a \geq 0$. Pruebe que $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ existe y $f'(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

P4 Comprobar que la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 sen\frac{1}{x} & si \quad x \neq 0; \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$$

tiene derivada discontinua.

P5

- Hallar $f'(a)$, si
$$f(x) = (x-a)\varphi(x)$$
y la función $\varphi(x)$ es continua en a.
- Comprobar que la función
$$f(x) = |x-a|\varphi(x)$$
donde $\varphi(x)$ es una función continuay $\varphi(a) \neq 0$, no admite derivada en el punto a.

P6 ¿Si una función $f(x)$ es derivable en un intervalo acotado (a, b) y

$$\lim_{x \to a} f'(x) = \infty$$

necesariemente tiene que ser

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

Examinar el ejemolo $f(x) = \sqrt[3]{x}$ cuando $x \to 0$?