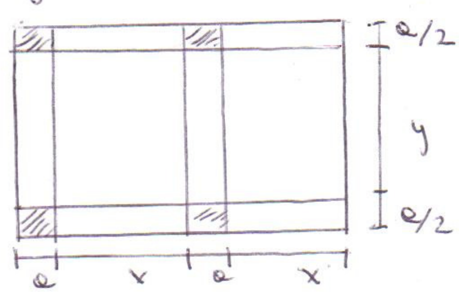
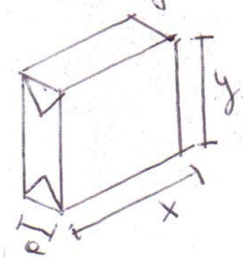
(1)

Auxiliar 4 — Prof. Jorge Sn. Martín

P1 Un envase de Tetra Pack se fabrica plegando un rectángulo de cartón como indica la figura. (Las regiones achuradas corresponden a los pliegues de las esquinas)





Vol = 1000 cm^3

i) Encuentre una expresión de la superficie original sólo en término de las cantidades a, x.

Sabemos que el volumen es fijo $V = a \cdot x \cdot y = 1000$
$\Rightarrow y = \dfrac{1000}{a \cdot x}$

La superficie $S = (a+y)\cdot(2a+2x)$
$= 2(a+y)(a+x)$ pero $y = \dfrac{1000}{a\cdot x}$

$$\Rightarrow \boxed{S = 2\left(a + \frac{1000}{a\cdot x}\right)(a+x)}$$

ii) Tomando a como parámetro conocido, demuestre que el valor $x = x(a)$ que minimiza dicha superficie es $x = \sqrt{\dfrac{1000}{a}}$. Justifique que se trata de un mínimo.

Primero buscamos los puntos críticos de la función S.

$$\frac{dS}{d} = 0 \Rightarrow S' = \cancel{2}\left(-\frac{1000}{a x^2}\right)(a+x) + \cancel{2}\left(a + \frac{1000}{a x}\right)(1) = 0$$

$$\Rightarrow 1000\frac{(a+x)}{a x^2} = a + \frac{1000}{a x}$$

$$\Rightarrow 1000(a+x) - a^2x^2 - 1000x = 0$$

$$\Rightarrow 1000\,\cancel{a} = a^2 x^2$$

$$\Rightarrow \boxed{x^* = \pm\sqrt{\frac{1000}{a}}}$$ La solución con sentido es la positiva.

② Para verificar que sea un mínimo calculamos $S''\left(x^*=\sqrt{\frac{1000}{a}}\right)$

$$S'' = \left\{2\cdot\left(a+\frac{1000}{ax}\right) - 2\left(\frac{1000}{ax^2}\right)(a+x)\right\}'$$

$$= \left\{2\left(-\frac{1000}{ax^2}\right) - 2\left[\left(\frac{1000}{ax^2}\right)+\left(-\frac{2\cdot 1000}{ax^3}\right)(a+x)\right]\right\}$$

$$S'' = \frac{-4000}{ax^2} + \frac{4000}{ax^3}(a+x) = \frac{4000}{ax^2}\left(\frac{a+x}{x}-1\right)$$

$$S'' = \frac{4000}{x^3} \quad \text{Como } x^*>0 \Rightarrow S''(x^*)>0$$

$\rightarrow x^*$ es un punto de mínimo de S.

iii) Use (ii) para obtener una expresión $S(a)$ para la superficie en función solamente de a y luego determine el valor mínimo de esta función (justifique por qué es mínimo). Explicite los valores óptimos de a, x, y.

Sol| Reemplazando x^* en S

$$\Rightarrow S = 2\left(a+\frac{1000}{\sqrt{\frac{1000}{a}}\cdot a}\right)\left(a+\sqrt{\frac{1000}{a}}\right)$$

$$= 2\left(a+\sqrt{\frac{1000}{a}}\right)\left(a+\sqrt{\frac{1000}{a}}\right) \Rightarrow \boxed{S=2\left(a+\sqrt{\frac{1000}{a}}\right)^2}$$

Encontremos los puntos críticos de S.

$$S'=0 \Rightarrow \frac{dS}{da}=0 \Rightarrow S'=4\left(a+\sqrt{\frac{1000}{a}}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{1000}}\cdot\frac{-1000}{a^2}\right)=0$$

Luego $\left(a+\sqrt{\frac{1000}{a}}\right)=0 \ \lor \ \left(1-\frac{1}{2a^2}\cdot\sqrt{a\cdot 1000}\right)=0$

Como $a>0 \Rightarrow a+\sqrt{\frac{1000}{a}}>0$

La única posibilidad es que $1-\frac{\sqrt{1000\cdot a}}{2a^2}=0$

$$\Rightarrow 2a^2=\sqrt{1000a} \quad ()^2$$

$$4a^{4^3} = 1000\cancel{a} \Rightarrow a^3=250 \Rightarrow \boxed{a^*=\sqrt[3]{250}}$$

③ Veamos que a^* efectivamente es punto de mínimo

$$\frac{d^2S}{da^2} = S''(a) = \left(1 - \frac{\sqrt{1000a}}{2a^2}\right)^2 + \left(a + \sqrt{\frac{1000}{a}}\right)\left(\frac{1}{a^3}\sqrt{1000a} - \frac{1}{2a^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1000a}}\cdot 1000\right)$$

$$S''(a^*) = \underbrace{\left(1 - \frac{\sqrt{1000a^*}}{2a^{*2}}\right)^2}_{>0} + \underbrace{\left(a^* + \sqrt{\frac{1000}{a^*}}\right)}_{>0 \text{ pues } a^*>0} \cdot \underbrace{\frac{1}{a^{*2}}}_{>0} \underbrace{\left(\frac{\sqrt{1000a^*}}{a^*} - \frac{250}{\sqrt{1000a^*}}\right)}_{??}$$

Notamos que el producto que nos falta, se puede escribir.

$$\left(\sqrt{\frac{1000}{a^*}} - \frac{1}{4}\sqrt{\frac{1000}{a^*}}\right) > 0$$

Luego $S''(a^*) > 0 \Rightarrow a^*$ es un punto de mínimo.

Luego $$x^* = \sqrt{\frac{1000}{a^*}} = \frac{\sqrt{1000}}{\sqrt[6]{250}} = \frac{\sqrt{1000}}{\sqrt[6]{\frac{1000}{4}}} = \sqrt[\frac{2}{3}]{1000}\cdot\sqrt[6]{4}$$

$$\Rightarrow \boxed{x^* = \sqrt[\frac{2}{3}]{1000}\cdot\sqrt[6]{4}}$$

Luego $$y = \frac{1000}{a^*\, x^*} = \frac{1000}{a^*\sqrt{\frac{1000}{a^*}}} = \sqrt{\frac{1000}{a^*}} = x^* = \boxed{\frac{\sqrt{1000}}{\sqrt[6]{250}} = y}$$

P2 | La función $f:[a,b] \to (0,\infty)$ se dice log-convexa si $\ln(f(x))$ es convexa.

i) Probar que si f es log-convexa entonces es convexa y buscar un contraejemplo que muestre que lo recíproco es falso.

ii) Probar que f es log-convexa si y sólo si f^α es convexa para todo $\alpha > 0$

(4) <u>Sol</u> i) Si f es log-convexa significa que $\ln(f(x))$ es convexa, en otras palabras:

$$(\ln(f(x)))'' > 0 \iff \left(\frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)\right)' > 0$$

$$\iff \frac{f''(x) \cdot f(x) - f'(x) \cdot f'(x)}{f(x)^2} > 0$$

Como $f(x)^2 > 0 \ \forall x$, lo anterior es equivalente a.

$$f''(x) f(x) - f'(x)^2 > 0$$

$$\iff f''(x) \cdot f(x) > f'(x)^2 > 0$$

$\uparrow$ pues $f'(x)^2 > 0 \ \forall x \in [a,b]$

$\Rightarrow (*) f''(x) \cdot f(x) > 0$, como $f(x) : [a,b] \to [0,+\infty]$

$\Rightarrow f(x) > 0 \ \forall x \in [a,b]$

Luego $(*)$ implica que: $f''(x) > 0$

$\Rightarrow f(x)$ es convexa.

Como contraejemplo basta considerar la parabola $f(x) = x^2$ definida de $[0,+\infty] \to [0,+\infty]$.

$$(\ln(x^2))'' = \frac{f''(x) \cdot f(x) - f'(x)^2}{f(x)^2} = \frac{2 \cdot x^2 - (2x)^2}{x^4} = -\frac{2x^2}{x^4} < 0$$

P3 | Considere la función $f(x) = (x+1)\ln\left(\left|\frac{x+1}{x}\right|\right)$ definida en $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

a) Encuentre los signos de f y sus ceros.

$$f(x) = 0 \iff (x+1) = 0 \quad \vee \quad \left|\frac{x+1}{x}\right| = 1$$

$$\iff \underset{(1)}{x = -1} \quad \vee \quad \underset{(2)}{\frac{x+1}{x} = 1} \quad \vee \quad \underset{(3)}{\frac{x+1}{x} = -1}$$

Notamos que el caso (1) indefine el logaritmo, veamos si podemos reparar este punto

$$\lim_{x\to -1^+} (x+1)\ln\left(\left|\frac{x+1}{x}\right|\right) = \lim_{x\to -1^+} \frac{\ln\left(\left|\frac{x+1}{x}\right|\right)}{1/(x+1)} \quad \text{tipo } \frac{\infty}{\infty}$$

Por l'hopital $\displaystyle\lim_{x\to -1^+} \frac{\left|\frac{x}{x+1}\right|\left|\frac{x+1}{x}\right|'}{-1/(x+1)^2} = \lim_{x\to -1^+} \frac{\left(\frac{x}{x+1}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-1/(x+1)^2}$

Esto último porque cuando $x\to -1^+$ $\frac{x}{x+1} < 0$, $\frac{x+1}{x} < 0$

$$\Rightarrow \lim_{x\to -1^+} \frac{(x+1)^2}{x\cancel{(x+1)}} = \lim_{x\to -1^+} \frac{x+1}{x} = 0$$

Es fácil ver que:

$$\lim_{x\to -1^-} (x+1)\ln\left(\left|\frac{x+1}{x}\right|\right) = 0$$

Luego si definimos $f(-1) = 0$, entonces $x = -1$ es un cero de f.

El caso (2) no es factible.

El caso (3) $\Rightarrow$ $x = -\frac{1}{2}$, que tb es cero de $f(x)$

Veamos que $\boxed{\forall x < -1}$ $(x+1) < 0$, $\frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x} < 1 \Rightarrow \ln\left(\left|\frac{x+1}{x}\right|\right) < 0$

$\Rightarrow \forall x < -1$ $f(x) > 0$

$\boxed{-1 < x < -1/2}$

$(x+1) > 0$

$1 > 1 + \frac{1}{x} > -1 \Rightarrow \ln\left(\left|\frac{x+1}{x}\right|\right) < 0$

$\Rightarrow \forall x, \quad -1 < x < -1/2 \quad f(x) < 0$

$\boxed{x > -1/2}$

$(x+1) > 0$

$1 + \frac{1}{x} > 1 \;\vee\; 1 + \frac{1}{x} < -1 \Rightarrow \ln\left(\left|\frac{x+1}{x}\right|\right) > 0$

$\Rightarrow \forall x > -\frac{1}{2} \quad f(x) > 0.$

b) Estudie las asíntotas horizontales de f. Encuentre los límites laterales cuando $x \to 0^{\pm}$ y $x \to 1^{\pm}$ ya sea, repare la función para que sea continua o bien, detecte si hay asíntotas verticales

Asíntotas horizontales $(x \to \pm\infty)$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln\left(\left|\frac{x+1}{x}\right|\right)}{1/(x+1)} \quad \text{tipo: } \frac{0}{0} \quad \text{Utilizando L'hôpital}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x+1}{x} = 1.$$

Además $$\lim_{x \to -\infty} \frac{\ln\left(\left|\frac{x+1}{x}\right|\right)}{1/(x+1)} \quad \text{tipo: } \frac{0}{0} \quad \text{Utilizando L'hôpital}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x+1}{x} = 1$$

$\Rightarrow$ Asíntota horizontal $y = 1$

Los límites laterales $x \to 1^{\pm}$ ya los calculamos y reparamos la función, sólo faltan cuando $x \to 0^{\pm}$

$$\lim_{x\to 0^+} \underbrace{(x+1)}_{\to 1} \underbrace{\ln\left(\left|\frac{x+1}{x}\right|\right)}_{\to\infty} \longrightarrow \nexists$$

$\Rightarrow$ f tiene asíntota vertical en $x=0$
no se puede reparar.

$$\lim_{x\to 0^-} \underbrace{(x+1)}_{\to 1} \underbrace{\ln\left(\left|\frac{x+1}{x}\right|\right)}_{\to\infty} \longrightarrow \nexists$$

c) Use el Teorema del valor medio en la función auxiliar $g(x)=\ln|x|$ en el intervalo $[x, x+1]$ para probar que

$$\frac{1}{x+1} < \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) < \frac{1}{x} \qquad \forall x \in (-\infty,-1)\cup(0,\infty)$$

<u>Sol</u>| El Teorema dice que $\exists\ c \in (x, x+1)$ tq

$$\frac{g(x+1)-g(x)}{(x+1)-(x)} = g'(c)$$

Primero veamos que $g'(x) = \dfrac{1}{|x|}\cdot|x|' = \dfrac{1}{x}\cdot x' = \dfrac{1}{x}$

pues los signos que arrojan los valores absolutos siempre se anulan ya sea que $x>0 \vee x<0$.

$$\Rightarrow \frac{\ln|x+1|-\ln|x|}{1} = \frac{1}{c}.$$

$$\Rightarrow \ln\left|\frac{x+1}{x}\right| = \frac{1}{c} \qquad \text{con } c\in(x,x+1)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x+1} < \ln\left|\frac{x+1}{x}\right| < \frac{1}{x}$$

Considerando ahora $x\in(-\infty,-1)\cup(0,\infty)$ de la parte (a) sabemos que $0<\dfrac{x+1}{x}$

$$\Rightarrow \frac{1}{x+1} < \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) < \frac{1}{x}$$

d) Calcule la primera derivada de f.

$$f'(x) = (x+1)' \cdot \ln\left(\left|\frac{x+1}{x}\right|\right) + (x+1) \cdot \ln\left(\left|\frac{x+1}{x}\right|\right)'$$

$$= 1 \cdot \ln\left(\left|\frac{x+1}{x}\right|\right) + (x+1) \cdot \left|\frac{x}{x+1}\right| \cdot \left|\frac{x+1}{x}\right|'$$

Como los val. abs. botan el mismo signo, se anula.

$$= \ln\left(\left|\frac{x+1}{x}\right|\right) + \cancel{(x+1)} \left(\frac{x}{\cancel{x+1}}\right)\left(\frac{x+1}{x}\right)'$$

$$= \ln\left(\left|\frac{x+1}{x}\right|\right) + \cancel{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\boxed{f'(x) = \ln\left(\left|\frac{x+1}{x}\right|\right) - \frac{1}{x}}.$$

(e) Use el resultado de la parte (c) para concluir sobre el crecimiento de f en $(-\infty, -1)$ y en $(0, \infty)$

Sol| Sabemos que en dicho intervalo $\ln\left(\left|\frac{x+1}{x}\right|\right) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$

Como además $\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) < \frac{1}{x} \Rightarrow \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x} < 0$

$\Rightarrow f'(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x} < 0$

$\Rightarrow f$ es decreciente en $(-\infty, -1) \cup (0, \infty)$

(f) Calcule $f''(x)$ e indique los intervalos donde f es cóncava y cuando f es convexa.

$$f''(x) = \left|\frac{x}{x+1}\right| \left|\frac{x+1}{x}\right|' + \frac{1}{x^2} = \frac{\cancel{x}}{x+1}\left(-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)x}$$

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)x}$$

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{x+1-x}{x^2(x+1)} = \frac{1}{x^2(x+1)}$$

Si $x < -1$ el denominador es negativo
y el numerador es positivo

$\Rightarrow$ Si $x < -1 \Rightarrow f''(x) < 0$

Si $x > -1 \Rightarrow f''(x) > 0$

(g) Estudie los límites de $f'(x)$ cuando $x \to -1^+$ y cuando $x \to 0^-$. Usando el signo de la segunda derivada en $(-1, 0)$ concluya sobre la monotonía de f en dicho intervalo y pruebe que existe un único punto donde $f'(x) = 0$.

Sol

$$\lim_{x \to -1^+} f'(x) = \lim_{x \to -1^+} \underbrace{\ln\left(\left|\frac{x+1}{x}\right|\right)}_{\to -\infty} - \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to -1} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} \ln\left(\left|\frac{x+1}{x}\right|\right) - \frac{1}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\overbrace{x\ln\left(\left|\frac{x+1}{x}\right|\right)}^{\to 0} - 1}{x}$$

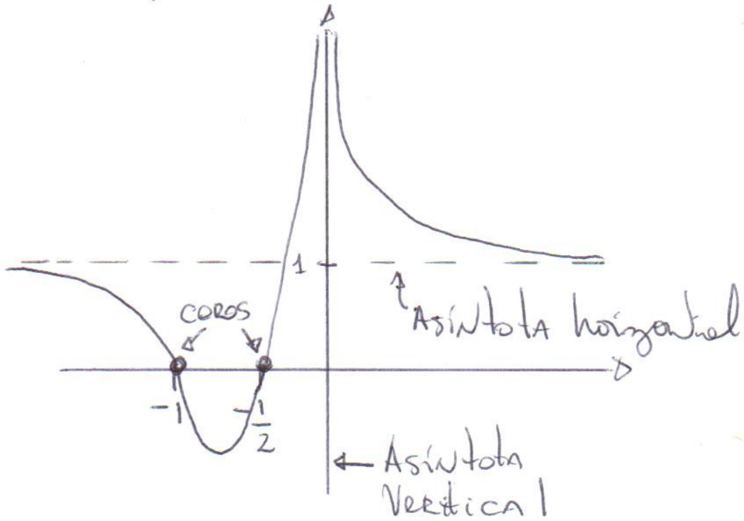
$= +\infty$

$\Rightarrow f'(x)$ es monotonamente creciente en $(-1, 0) \Rightarrow f$ es convexa en dicho intervalo.

Como $f' \to -\infty$ si $x \to -1^+$ y $f' \to \infty$ si $x \to 0^-$, entonces $\exists\, a, b \in (-1, 0)$ tales que $f'(a) \cdot f'(b) < 0$, luego por el TVI $\exists\, c \in (-1, 0)$ tq $f'(c) = 0$

En el resto del dominio f es estrictamente decreciente $\Rightarrow f'(x) < 0$ $\forall x \in (-\infty, -1) \cup (0, \infty) \Rightarrow \nexists\, x$ tq $f'(x) = 0$

Bosquejo de f.



P4] a) Una planta con capacidad máxima 9 ton/día, puede producir x toneladas de cobre corriente e y toneladas de cobre fino diarias. Si se sabe que $y = \frac{40-5x}{10-x}$ y que el precio del cobre fino es 3,6 veces el precio del cobre corriente, se pide determinar cual es la producción que produce el máximo ingreso.

Sol] Denotemos p: el precio del cobre corriente, la función de ingreso es:

$$I = p \cdot x + 3{,}6\, p \cdot y$$

ó $$I = p \cdot x + 3{,}6\, p \cdot \left(\frac{40-5x}{10-x}\right)$$

Encontremos los puntos críticos..

$$I' = 0 \Rightarrow I' = p + 3{,}6\, p \, \frac{(-5)(10-x)-(40-5x)\cdot(-1)}{(10-x)^2} = 0$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{5(10-x) - (40-5x)}{(10-x)^2} \cdot 3{,}6$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{50 - \cancel{x5} - 40 + \cancel{5x}}{(10-x)^2} \cdot 3{,}6$$

$$1 = \frac{36}{(10-x)^2} \Rightarrow (10-x)^2 = 36$$

Solución tiene sentido

$$\Rightarrow 10-x = \pm 6 \Rightarrow \boxed{x^* = 4}$$

$x^* = 16$ ← fuera de la restricción

$x^* = 4 \Rightarrow y = \left(\frac{40 - 5\cdot 4}{10-4}\right) = \frac{20}{6} = \frac{10}{3} \Rightarrow \boxed{y^* = \frac{10}{3}}$

Verifiquemos que x^* es un punto de máximo.

$$I'' = 3{,}6\,p \cdot (-10) \cdot \frac{-2}{(10-x)^3} \cdot (-1) = -\frac{72p}{(10-x)^3}$$

Evaluando en $x^* = 4$

$$I''(x^*) = -\frac{72p}{(10-4)^3} = -\frac{72p}{6^3} < 0 \Rightarrow I(x^*) \text{ es concavo}$$

Luego x^* es un máximo.

b) Sea f continua en $[0,\infty)$, diferenciable en $(0,\infty)$ y tal que $f(0) = 0$ y f' creciente en $\mathbb{R}^+$

1) * Use el teorema del Valor medio para probar que $f'(x) > \frac{f(x)}{x}$ en $\mathbb{R}^+$

2) Deduzca que la función $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ es creciente en $\mathbb{R}^+$.

Sol// 1) Consideremos el intervalo $[0,x]$ con $x \in \mathbb{R}^+$, el TVM dice que. $\exists\, c \in (0,x)$ tq

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(c) \quad \text{pero } f(0) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{f(x)}{x} = f'(c) \quad \text{Si } f' \text{ creciente y } \begin{matrix} x > c \\ f'(x) > f'(c) \end{matrix}$$

$$\frac{f(x)}{x} = f'(c) < f'(x)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{f(x)}{x} < f'(x)}$$

2) Veamos que $g'(x) = \frac{f'(x)\cdot x - f(x)\cdot 1}{x^2} = \frac{f'(x)}{x} - \frac{f(x)}{x}\cdot\frac{1}{x}$

Pero de (1) $\frac{f(x)}{x} < f'(x) \Rightarrow g'(x) > \frac{f'(x)}{x} - f'(x)\cdot\frac{1}{x} = 0$

$\Rightarrow g'(x) > 0 \Rightarrow g$ es creciente.

(b) Usando el Teorema del Valor Medio, demuestre que:

$$1 + \ln x < (x+1)\ln(x+1) - x\ln x < 1 + \ln(x+1) \quad \forall x > 0$$

Sol | Consideremos el intervalo $[x, x+1]$ y la función

$f(x) = \ln(x^x) \quad \vee \quad f(x) = x\ln(x)$

El TVM dice:

$\exists c \in (x, x+1)$ $$\frac{f(x+1) - f(x)}{\cancel{x+1-x}} = f'(c)$$

$$(x+1)\ln(x+1) - x\ln x = f'(c)$$

Es fácil ver que $f'(x) = \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} = 1 + \ln(x)$

Como $f'(x)$ es creciente $x+1 > c$

$$\Rightarrow f'(x+1) > f'(c)$$
$$\Rightarrow 1 + \ln(x+1) > f'(c)$$

Luego $f(x+1) - f(x) < 1 + \ln(x+1)$

Por otro lado $x < c \Rightarrow f'(x) < f'(c)$

$$\Rightarrow \ln(x) + 1 < f'(c)$$

Luego $\ln(x) + 1 < f'(c) = f(x+1) - f(x)$

Finalmente $$\boxed{\ln(x) + 1 < (x+1)\ln(x+1) - x\ln(x) < 1 + \ln(x+1)}$$

$\boxtimes$