Clase Auxiliar 4

Profesor: Jorge San Martín
Auxiliares: Francisco Jiménez - Ramiro Villagra

Resumen

- TVM: Sean $f, g : [a, b]\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuas y derivables, existe $c \in (a, b)$ tal que:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

- Derivadas de orden superior:

$$f^{[k]}(\bar{x}) = (f^{[k-1]})'(\bar{x})$$

- Desarrollo de Taylor: Sea $f : [(a, b)\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (k+1)-veces derivable en (a, b), existe $\xi \in (\bar{x}, x)$

$$f(x) = T_f^k(x - \bar{x}) + \frac{f^{[k+1]}(\xi)}{(k+1)!}(x - \bar{x})^{k+1}$$

$$T_f^k(x) = \sum_{i=0}^{k} \frac{f^{[i]}(\bar{x})}{i!}(x - \bar{x})^i$$

- Método de Newton:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

- Monotonía: Sea $f : [a, b]\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b)
  - $f'(x) \geq 0 \Rightarrow$ creciente en (a, b).
  - $f'(x) \leq 0 \Rightarrow$ decreciente en (a, b).
  - $f'(x) > 0 \Rightarrow$ estrictamente creciente en (a, b).
  - $f'(x) < 0 \Rightarrow$ estrictamente decreciente en (a, b).
- Convexidad: Sea $f : [a, b]\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b)
  - $f''(x) > 0 \Rightarrow$ convexa en (a, b)
  - $f''(x) < 0 \Rightarrow$ concava en (a, b)
- Puntos críticos: Sea $f : (a, b)\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ k veces derivable en $\bar{x} \in (a, b)$, con $f'(\bar{x}) = \cdots = f^{[k-1]}(\bar{x}) = 0$ y $f^{[k]}(\bar{x}) \neq 0$, $k \geq 2$, los casos son:
  - k par y $f^{[k]}(\bar{x}) > 0$, $\bar{x}$ es mínimo local.
  - k par y $f^{[k]}(\bar{x}) < 0$, $\bar{x}$ es máximo local.
  - k impar , $\bar{x}$ es punto de inflexión.

Ejercicios

P1 Estudiar completamente la función definida por:

$$f(x) = x + 1 - \frac{2}{x} - \frac{3\ln(x)}{x}$$

Para esto:

1. Establezca el dominio y encuentre por inspección un cero de f.
2. Estudie asítotas verticales y horizontales.
3. Estudie asíntotas oblicuas.
4. Calcule f' y determine sus ceros por inspección. Estudie crecimientos, máximos y mínimos.
5. Calcule f''. Estudie convexidades y encuentre puntos de inflexión.
6. Haga un bosquejo del gráfico de f. Indique el recorrido de f.

P2 Considere la función definida mediante la siguiente ley:

$$y = \begin{cases} \frac{2x^2}{x+a} & six < a \\ 2x - e^{x-a} & six \geq a \end{cases}$$

1. Calcule los límites de f cuando $x \to a^{\pm}$ en términos de a, y pruebe que f resulta ser contínua en a si y solamente si $a = 1$. Use de aquí en adelante que $a = 1$
2. Establezca el dominio de f y el conjunto de los puntos en los cuales f es contínua.
3. Pruebe, usando TVI, que f se anula en algún punto del intervalo $[1, +\infty)$.
4. Determine (si existen), asíntotas horizontales, verticales y oblícuas.
5. Calcule f' y determine puntos críticos, intervalos de crecimiento, máximos y mínimos.
6. Calcule f'' y determine convexidaes, puntos de inflexión (si es que existen).

P3 Calcular la derivada de $f(x) = (a^x + b^x)^{\frac{1}{x}}$

P4 $y = f(x)$ está definida implícitamente por $x^2 + xy + y^2 - 3 = 0$. Demuestre que el punto $P(1, -2)$ es un mínimo local de f.

P5 Averiguar si es derivable en $x = 0$ la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} & si \quad x \neq \\ \frac{1}{2} & si \quad x = 0 \end{cases}$$

P6 Se define la función

$$y = \begin{cases} \frac{g(x)}{sinh(x)} & \text{si } x \neq 0 \\ a & \text{si x=0} \end{cases}$$

Sabiendo que f es diferenciable en 0 y g es dos veces diferenciable en 0 se pide determinar, justificando, el valor de $g(0)$, y los valores de a y $f'(0)$ en función de $g'(0)$ y $g''(0)$.

P7 Desarrollo de Taylor de $f(x) = senh(x)$ en torno a 0. Calcule $\sinh(1)$ con tres términos no nulos del desarrollo anterior y estime una cota del error. Indicación: Puede usar $2,5 < e < 3$.

P8 Sea f una función infinitamente derivable en $\mathbb{R}$ tal que $|f^{(k)}(x)| \leq 1$ para todo $k \in N$ y $x \in \mathbb{R}$. Demuestre que si $x_0 \in \mathbb{R}$ es fijo, entonces para todo $x \in [x_0 - 1, x_0 + 1]$ se cumple que:

$$\lim_{n \to \infty} |f(x) - T_f^n(x - x_0)| = 0$$

Donde $T_f^n(x - x_0)$ denota al polinomio de Taylor de f de orden n en torno a x_0