Clase Auxiliar 8

Profesor: Jorge San Martín
Auxiliares: Francisco Jiménez - Ramiro Villagra

Resumen

- Continuidad de la integral: Sea f una función integrable en "$[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, Entonces la función definida por:

$$G(x) = \int_a^x f$$

es continua en $[a, b]$.

- TFC: Sea f integrable en a, b. Si existe una función F continua en (a, b) tal que $F' = f$ en (a, b), entonces:

$$\int_a^b f = F(b) - F(a)$$

- Integración por partes: Sean f y g dos funciones continuas en un intervalo I y diferenciables en $int(I)$. Sean $a, b \in int(I)$. Si f' y g' son continuas, entonces:

$$\int_a^b fg' = fg|_a^b - \int_a^b f'g$$

- Integración por cambio de variable: Sea g una función continua en un intervalo I y diferenciable en $int(I)$, con g' continua. Sean $a, b \in int(I)$, con $a < b$. Sea f una función continua en $g([a, b])$, entonces:

$$\int_a^b (f(g))g' = \int_{g(a)}^{g(b)} f$$

- Valor medio: Sea f una función integrable en el intervalo $[a, b]$. Se llama valor medio de $f$en $[a, b]$ al número real:

$$\langle f \rangle = \bar{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f$$

- TVM para integrales: Si f es continua en $[a, b]$ y g es una función integrable en $[a, b]$ que no cambia de signo, entonces $\exists \xi \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^b fg = f(\xi) \int_a^b g$$

- Teorema de Taylor con resto integral: Sea I un intervalo abierto que contenga al intervalo cerrado de extremos x_o y x. Consideremos una función f de clase $C^{(n+1)}(I)$, se tiene que:

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

Donde:

  - $$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i$$

- $$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt$$

Ejercicios

P1 Sea $f : [1, \infty[\to \mathbb{R}$ una función no negativa y creciente

- Usando la partición $P = 1, 2, 3, \ldots, n$ puebe que

$$\sum_{i=1}^{n-1} f(i) \leq \int_1^n f(x)dx \leq \sum_{i=1}^{n} f(i), \forall n \geq 2$$

- Considere $f(x) = ln(x)$ y utilice la parte anterior para demostrar que

$$(n-1)! \leq n^n e^{-n+1} \leq n!, \forall n \geq 1$$

Indicación $\int_1^n ln(x)dx = nln(n) - (n+1)$

P2

- Demuestre que:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{e^{1/4}} + \frac{1}{e}\right) \leq \int_0^1 e^{-x^2} dx \leq \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{e^{1/4}}\right)$$

Indicación Considere la partición $P = 0, \frac{1}{2}, 1$

- Demuestre que

$$\int_a^b \frac{1}{x} dx = ln(b) - ln(a)$$

donde $0 < a < b$. *Indicación* Considere la partición $x_i = aq, i = 0, 1, \ldots, n$

P3 Sea $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ una función biyectiva y derivable en $(0, \infty)$. Muestre que $g(x) = \int_0^x f(t)dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)dt$, satiface que $g'(x) = f(x) + f'(x)x$. Concluya que $g(x) = xf(x)$.

P4 Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función biyectiva, diferenciable y tal que $g(0) = 0$. Sea $f : \mathbb{R} \to]-1, 1[$ una función diferenciable. Suponga que f y g satisfacen:

$$g(x) = \int_0^{g(x)} f^2(g^{-1}(x))dx + f(x)$$

- Pruebe que $f(x) = tanh(g(x))$
- Calcule la integral $\int_0^{x^3} tanh^2(t)dt$. *Indicación* Observe que $f(g^{-1})(x) = tanh(x)$.

P5 Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada e integrable, verificando que $f((a + b) - x) = f(x)$ para todo $x \in [a, b]$.

- Probar que $\int_a^b xf(x) = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)$
- Sea ahora $g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ continua. Prube que $\int_0^\pi xg(sen(x)) = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi g(sen(x))$.
- Deduzca que $\int_0^\pi \frac{xsen(x)}{1+cos^2(x)} = \frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}$ y calcule el valor de la integral