Pauta auxiliar 5

Profesor: Jorge San Martín
Auxiliares: Francisco Jiménez - Ramiro Villagra

P1 Calculemos las sumas superior e inferior

$$S(f,P)=\sum_{i=2}^{n} M_i(x_i-x_{i-1})$$

Como f es creciente $M_i=f(i)$

$$S(f,P)=\sum_{i=2}^{n} f(i)$$

Análogamente se tiene

$$s(f,P)=\sum_{i=1}^{n-1} f(i)$$

Luego como sabemos que $s(f,P)\leq\int_a^b fdx\leq S(f,P)$ se concluye que:

$$\sum_{i=1}^{n-1} f(i)\leq\int_a^b fdx\leq\sum_{i=2}^{n} f(i)$$

b) Reemplazando $f(x)=\ln(x)$

$$s(f,P)=\sum_{i=1}^{n-1}\ln(i)=\ln((n-1)!)$$

$$S(f,P)=\sum_{i=2}^{n}\ln(i)=\ln(n!)$$

Integrando por partes

$$\leq\int_1^n\ln(x)dx=\ln(n)n-(n-1)$$

Utilizando la parte anterior, se concluye.

P2 Calculemos la suma de Riemann de $f(x)=e^{-x^2}$, recordemos que f es decreciente

$$S(f,P)=\sum_{i=1}^{2} e^{-(x_{i-1})^2}(x_i-x_{i-1})=\frac{1}{2}(\frac{1}{e^{1/4}}+\frac{1}{e})$$

Análogamente

$$s(f,P)=\sum_{i=1}^{2} e^{-(x_i)^2}(x_i-x_{i-1})=\frac{1}{2}(\frac{1}{e^{1/4}}+1)$$

Como la función es acotada, monótona y está bien definida es Riemann integrable, luego

$$s(f,P)\leq\int_0^1 e^{-x^2}dx\leq S(f,P)$$

b) Calculemnos las sumas de Riemann, como f es decreciente $M_i = f(x_{i-1})$ y $(x_i - x_{i-1}) = aq^i - aq^{i-1}$, luego:

$$S(f,P) = \sum_{i=1}^{n} q - 1 = n(q-1)$$

Analogamente:

$$s(f,P) = \sum_{i=1}^{n} 1 - \frac{1}{q} = n(1 - \frac{1}{q})$$

Ademas debe cumplirse que $aq^n = b$, luego $n = \frac{1}{\ln(q)} \ln(\frac{b}{a})$, como es Riemann integrable

$$s(f,P) \leq \int_a^b \frac{1}{x} dx \leq S(f,P)$$

$$n(1-\frac{1}{q}) \leq \int_a^b \frac{1}{x} dx \leq n(q-1)$$

$$\frac{1}{\ln(q)} \ln(\frac{b}{a})(1-\frac{1}{q}) \leq \int_a^b \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{\ln(q)} \ln(\frac{b}{a})(q-1)$$

Tomando el limite $q \to 1$ sobre la desigualdad anterior, por teorema del Sandwich

$$\int_a^b \frac{1}{x} = \ln(b) - \ln(a)$$

P3 Tenemos que $g(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)dt$

- $g'(x) = f(x) \cdot x' + f(0) \cdot 0' + f^{-1}(f(x)) \cdot f'(x) + f^{-1}(0) \cdot 0' = f(x) + x \cdot f'(x)$
- $g'(x) = f(x) + x \cdot f'(x) = (x \cdot f(x))' / \displaystyle\int () \Rightarrow g(x) = x \cdot f(x) + C$ Para determinar C necesitamos evaluar en 0, sabiendo que $f(0) = 0$ $g(0) = 0 \cdot f(0) + C = C$ ademas sabemos que $g(0) = \int_0^0 f(t)dt + \int_0^{f(0)} f^{-1}(t)dt = 0$ por tanto $C = 0$ y se concluye

P4 Notemos que, por el teorema fundamental del calculo

$$g'(x) = f^2(g^{-1}(g(x)))g'(x) + f'(x) = f^2 g'(x) + f'(x)$$

Agrupando $g'(x)$

$$g'(x) = \frac{f'(x)}{1 - f^2}$$

Luego notamos que $(\tanh^{-1}(x))' = \frac{1}{1-x^2}$, esto significa que $g'(x) = (\tanh^{-1}(f(x)))'$. Podemos concluir entonces que:

$$g(x) = \tanh^{-1}(f(x)) + C$$

Del enunciado sabemos que

$$g(0) = \int_0^{g(0)} f^2(g^{-1}(0))dx + f(0) = \int_0^0 f^2(0)dx + f(0) = 0$$

Luego $f(0)=0$, entonces tenemos que:

$$g(0)=\tanh^{-1}(f(0))+C=\tanh^{-1}(0)+C=0$$

Luego C=0, podemos concluir entonces que $\tanh(g(x))=f(x)$

Ahora calculemos la integral, usando la indicacion

$$\int_0^{x^3}\tanh^2(t)dt=\int_0^{x^3}f^2(g^{-1}(x))dt$$

Del enunciado sabemos que como $g(x)=x^3$ es biyectiva, direnciable y $g(0)=0$

$$\int_0^{g(x)}f^2(g^{-1}(x))dx=g(x)-f(x)=x^3-\tanh(x^3)$$

P5

$$\int_a^b xf(x)dx=\int_a^b xf((a+b)-x)dx$$

Haciendo cambio de variable $u=(a+b)-x\rightarrow du=-dx$

$$\int_a^b xf((a+b)-x)dx=\int_b^a((a+b)-u)f(u)(-du)=\int_a^b((a+b)-u)f(u)du=\int_a^b(a+b)f(u)du-\int_a^b uf(u)du$$

Luego:

$$\begin{aligned}\int_a^b xf(x)dx &= \int_a^b(a+b)f(u)du-\int_a^b uf(u)du\\ \int_a^b xf(x)dx+\int_a^b uf(u)du &= \int_a^b(a+b)f(u)du\\ 2\int_a^b uf(u)du &= \int_a^b(a+b)f(u)du\\ \int_a^b uf(u)du &= \frac{(a+b)}{2}\int_a^b f(u)du\end{aligned}$$

Verifiquemos que $g(\sin(x))=g(\sin(\pi-x))$, esto es cierto puesto que $\sin(\pi-x)=\sin(x)$, luego de la parte anterior se tiene directamente que:

$$\int_0^{\pi}xg(\sin(x))=\frac{\pi}{2}\int_0^{pi}g(\sin(x))$$

Finalmente notemos que:

$$\int_0^{\pi}\frac{x\sin(x)}{1+\cos^2(x)}=\int_0^{\pi}\frac{x\sin(x)}{2-\sin^2(x)}$$

Podemos definir $g(x)=\frac{x}{2-x^2}$, luego usando lo anterior:

$$\int_0^\pi \frac{x\sin(x)}{2-\sin^2(x)} = \int_0^\pi xg(sin(x)) = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi g(sin(x)) = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{x\sin(x)}{1+\cos^2(x)}$$

Haciendo el cambio de variable $u = cos(x) \rightarrow du = -\sin(x)dx$

$$\frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)} = -\frac{\pi}{2}\int_1^{-1} \frac{du}{1+u^2} = \frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1} \frac{du}{1+u^2} = \frac{\pi}{2}\left(\arctan(1)-\arctan(-1)\right) = \frac{\pi^2}{4}$$