Clase Auxiliar 11

Profesor: Jorge San Martín
Auxiliares: Francisco Jiménez - Ramiro Villagra

Resumen

- Longitud de arco: Sea f una función continuamente diferenciable en $[a,b]$, la longitud de curva en este intervalo es:
$$L_a^b(f) = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}dx$$
- Superficie del manto de un sólido en revolución con respecto a OX: Sea f una función continuamente diferenciable en el intervalo $[a,b]$, la superficie en el intervalo es:
$$A_a^b(f) = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}dx$$
- Coordenadas polares: Se define:
$$\begin{array}{ll} x = \rho cos(\phi) & \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ y = \rho sen(\phi) & \phi = arctan(\frac{y}{x}) \end{array}$$
Área en polares:
$$A_a^b = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\phi)d\phi$$
Longitud de curva en polares:
$$L_\alpha^\beta = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2(\phi)+(\rho'(\phi))^2}d\phi$$
- Centro de gravedad:
$$X_G = \frac{\int_a^b xf(x)dx}{\int_a^b f(x)dx}, Y_G = \frac{\int_a^b f^2(x)dx}{2\int_a^b f(x)dx}$$

Ejercicios

P1 Calcular la longitud de arco y la superficie del manto de revolución con respecto a OX de:

- $y = \frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{1}{2}x^{1/2}$ entre $x=1$ y $x=4$.
- La curva $(\frac{x}{a})^{2/3} + (\frac{y}{b})^{2/3} = 1$ en el primer cuadrante.

P2 Sea $f : [0,\infty[\to \mathbb{R}$ tal que $f(0)=0$ y la longitud de la curva $y=f(x)$ entre 0 y x es igual a $x^2+2x-f(x)$

- Determinar $f(x)$.
- Calcular el área bajo la curva $y=f(x)$ y su longitud entre 0 y 1.

P3 Probar que el largo de la elipse de ecuación $x^2 + \frac{1}{2}y^2 = 1$ es igaul al largo de la sinusoide $y = sen(x)$ entre $0{,}2\pi$.

P4 Calcular el área y longitu de curva de:

- cardioide: $\rho(\phi) = a(1 + cos(\phi))$.
- espiral: $\rho(\phi) = k \cdot e^{\phi}$.

P5 Demostrar que el centro de masas entre dos funciones f y g con $f > g$, en un intervalo es la resta de los centros de masas de las funciones. Suponga densidad constante.

P6 Determinar el centro de masa de la región encerrada entre las curvas $x^2 + y^2 = a^2$ y $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$. Suponga densidad constante