Clase Auxiliar 12

Profesor: Jorge San Martín
Auxiliares: Francisco Jiménez - Ramiro Villagra

Resumen

- Coordenadas cilíndricas: La relación entre coordenadas cilíndricas y cartesianas es:

$$\vec{r}(\rho,\theta,z) = (x,y,z) = (\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta, z)$$

Se tiene por tanto:

$$\begin{array}{rcl} \rho = \sqrt{x^2+y^2} & , & \rho \in [0,+\infty[\\ \theta = \arctan(\frac{y}{x}) & , & \theta \in [0,2\pi[\\ z = z & , & z \in \mathbb{R} \end{array}$$

- Coordenadas esféricas: La relación entre coordenadas esféricas y cartesianas es:

$$\vec{r}(r,\varphi,\theta) = (x,y,z) = (r\operatorname{sen}\varphi\cos\theta, r\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta, r\cos\varphi)$$

Se tiene por tanto:

$$\begin{array}{rcl} r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} & , & r \in [0,+\infty[\\ \varphi = \arctan\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right) & , & \varphi \in [0,\pi] \\ \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & , & \theta \in [0,2\pi[\end{array}$$

- Longitud de curva: Sea Γ una curva simple y regular. Sea $\vec{r}:[a,b]\to\mathbb{R}$ una parametrización regular de Γ. La longitud de curva es:

$$L(\Gamma) = \int_a^b \left\|\frac{d\vec{r}}{dt}\right\| dt$$

- Longitud de arco: Sea Γ una curva simple y regular. Sea $\vec{r}:[a,b]\to\mathbb{R}$ una parametrización regular de Γ. La longitud de arco $s:[a,b]\to[0,L(\Gamma)]$ es:

$$s(t) = \int_a^t \left\|\frac{d\vec{r}}{dt}(\tau)\right\| d\tau$$

- Parametrización o longitud de arco: Sea Γ una curva simple y regular. Sea $\vec{r}:[a,b]\to\mathbb{R}$ una parametrización regular de Γ. Se define la parametrización natural $\vec{\sigma}:[0,L(\Gamma)]\to[a,b]$:

$$\vec{\sigma}(s) = \vec{r}(t(s))$$

Ejercicios

P1 Para la curva definida por $y = x^3$, $z = \frac{sqrt6}{2}x^2$, encontrar la longitud de curva.

P2 Encontrar la parametrización en longitud de arco para la hélice $\vec{r}(t) = (a\cos t, a\operatorname{sen} t, \frac{ht}{2\pi})$, $t \in [0,4\pi]$

P3 Considere la curva plana Γ descrita por la siguiente ecuación en coordenadas polares

$$\rho = a(1-\cos\theta), a > 0, \theta \in [0,2\pi]$$

- Encuentre una parametrización para Γ, grafíquela y encuentre posibles irregularidades.
- Calcule el largo de Γ

P4 Una partícula se mueve describiendo una trayectoria Γ sobre el manto del cono $x^2 + y^2 = z^2$, de forma tal que su altura z y el ángulo θ en coordenadas cilíndricas cumple la relación $z = e^{-\theta}$, con $\theta \in [0, \infty[$

- Encuentre una parametrización de Γ. Dibuje la curva.
- Calcule el largo de Γ.
- Encuentre la parametrización natural de Γ

P5 Encuentre una parametrización de:

- $x^2 + y^2 = R^2$.
- $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$
- $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$

P6 Dados $a, b, c > 0$ tales que $c^2 = a^2 + b^2$, sea Γ la curva parametrizada por $\vec{r} : [0, 2\pi c[\to \mathbb{R}^3$ con

$$\vec{r}(s) = \left(a \cos \frac{s}{c}, a \operatorname{sen} \frac{s}{c}, b \frac{s}{c} \right)$$

Muestre que la longitu de arco sobre Γ es s.