

# Auxiliar 15 Series

Profesor: Jorge San Martín  
Auxiliares: Ramiro Villagra  
Francisco Jiménez

## Criterios de Convergencia mas usados

### 1. Mayoración de Series

Sean 2 sucesiones de modo que  $a_n \leq \alpha b_n$  para algun  $\alpha$  (fijo) a partir de  $n > n_0$ .  
Si  $\sum b_k$  converge  $\Rightarrow \sum a_k$  converge.

### 2. Comparación por cociente:

Sean dos sucesiones positivas tales que  $c = \lim \frac{a_n}{b_n}$  existe:

- a) Caso  $c = 0$ . Si  $\sum b_k < \infty \Rightarrow \sum a_k < \infty$
- b) Caso  $c > 0$ .  $\sum b_k < \infty \Leftrightarrow \sum a_k < \infty$

### 3. Criterio del cociente:

Sea  $a_n > 0$  tal que  $r = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$  existe:

- a) Caso  $r < 1 \Rightarrow \sum a_k$  converge.
- b) Caso  $r > 1 \vee r = \infty \Rightarrow \sum a_k$  converge.
- a) Caso  $r = 1$  no se puede determinar.

### 4. Criterio de la raíz n-esima

Sea  $a_n > 0$  tal que  $r = \lim \sqrt[n]{a_n}$  existe:

- a) Caso  $r < 1 \Rightarrow \sum a_k$  converge.
- b) Caso  $r > 1 \vee r = \infty \Rightarrow \sum a_k$  converge.
- a) Caso  $r = 1$  no se puede determinar.

### 5. Criterio de la integral impropia:

Sea  $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$ , decreciente, se tiene que :

$$\sum f(n) < \infty \Leftrightarrow \int_1^{\infty} f(x)dx < \infty$$

### 6. Criterio de Leibnitz:

Sea  $a_n$  decreciente y convergente a 0, entonces  $\sum (-1)^n a_n$  es convergente.

**P1.**

a) Analice la convergencia de la siguiente serie, en caso de ser convergente, calcule su valor:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$$

*Indicacion:* Utilice la identidad  $\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2(k+2)} \right]$

b) Use el criterio de la Integral para analizar la convergencia de la integral  $\int_1^{\infty} \frac{e^x}{x^x}$   
 c) Analice la convergencia absoluta y condicional de la serie  $\sum_1^{\infty} (-1)^k \frac{2k+1}{k(k+1)}$

**P2.**

a) Demuestre que para todo numero real  $p$ , la serie  $\sum \frac{e^{pn}}{n!}$  converge.

b) Estudie la convergencia de la serie  $\sum \frac{(1+\frac{10}{n})^{n^2}}{n!}$ .

Considere la funcion:

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x), x \geq 0$$

c) demuestre que la serie  $\sum a_n$  de termino  $a_n = (-1)^n f(n)$  converge.

d) Calcule  $\lim_{x \rightarrow \infty} x f(x)$  y utilice este resultado pra demostrar que la serie definida en (c) no converge absolutamente.

**P3.** Estudie la convergencia de las siguientes series:

a)  $\sum \left( \frac{k}{k+1} \right)^{k^2}$

b)  $\sum \frac{\sqrt{k-1}!}{\prod_{j=1}^k (1+\alpha\sqrt{j})}$  para  $\alpha > 1$

c)  $\sum \arctan \left( \frac{1}{1+k+k^2} \right)$  Ind: muestre que  $\arctan x \leq x \forall x \geq 0$