Auxiliar 15 Series

Profesor: Jorge San Martin
Auxiliares: Ramiro Villagra
Francisco Jiménez

Criterios de Convergencia mas usados

1. Mayoracion de Series

   Sean 2 sucesiones de modo que que $a_n \leq \alpha b_n$ para algun α (fijo) a partir de $n > n_0$.
   Si $\sum b_k$ converge $\Rightarrow \sum a_k$ converge.

2. Comparacion por cuociente:

   Sean dos sucesiones positivas tales que $c = \lim \frac{a_n}{b_n}$ exite:

   a) Caso $c = 0$. Si $\sum b_k < \infty \Rightarrow \sum a_k < \infty$
   b) Caso $c > 0$. $\sum b_k < \infty \Leftrightarrow \sum a_k < \infty$

3. Criterio del cuociente:

   Sea $a_n > 0$ tal que $r = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$ exite:

   a) Caso $r < 1 \Rightarrow \sum a_k$ converge.
   b) Caso $r > 1 \vee r = \infty \Rightarrow \sum a_k$ converge.
   a) Caso $r = 1$ no se puede determinar.

4. Criterio de la raiz n-esima

   Sea $a_n > 0$ tal que $r = \lim \sqrt{a_n}$ exite:

   a) Caso $r < 1 \Rightarrow \sum a_k$ converge.
   b) Caso $r > 1 \vee r = \infty \Rightarrow \sum a_k$ converge.
   a) Caso $r = 1$ no se puede determinar.

5. Criterio de la integral impropia:

   Sea $f : [1, \infty) \to \Re^+$, decreciente, se tiene que :

$$\sum f(n) < \infty \Leftrightarrow \int_1^\infty f(x)dx < \infty$$

6. Criterio de Leibnitz:

   Sea a_n decreciente y convergente a 0, entonces $\sum (-1)^n a_n$ es convergente.

P1.

a) Analice la convergencia de la siguiente serie, en caso de ser convergente, calcule su valor:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1(k+2)}$$

Indicacion: Utilice la identidad $\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2(k+2)}\right]$

b) Use el criterio de la Integral para analizar la convergencia de la integral.$\int_1^\infty \frac{e^x}{x^x}$
c) Analice la convergencia absoluta y condicional de la serie $\sum_1^\infty (-1)^k \frac{2k+1}{k(k+1)}$

P2.
a) Demuestre que para todo numero real p, la serie $\sum \frac{e^{pn}}{n!}$ converge.

b) Estudie la convergencia de la serie $\sum \frac{(1+\frac{10}{n})^{n^2}}{n!}$.
Considere la funcion:

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x), x \geq 0$$

c)demuestre que la serie $\sum a_n$ de termino $a_n = (-1)^n f(n)$ converge.

d)Calcule $\lim_{x\to\infty} xf(x)$ y utilice este resultado pra demostrar que la serie definida en (c) no converge absolutamente.

P3. Estudie la convergencia de las siguientes series:
a) $\sum \left(\frac{k}{k+1}\right)^{k^2}$

b) $\sum \frac{\sqrt{k-1!}}{\prod_{j=1}^{k}(1+\alpha\sqrt{j})}$ para $\alpha > 1$

c) $\sum \arctan\left(\frac{1}{1+k+k^2}\right)$ Ind: muestre que $\arctan x \leq x \forall x \geq 0$