CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

Aux 2, Agosto 2009

Problema 1. Un conductor demora 5 horas en recorrer los (aproximadamente) 500 kms. que separan Santiago y Concepción. Pruebe que existe un tramo del viaje, de una longitud de 100 kms., que es recorrido en exactamente 1 hora.

Problema 2. Considere la función:

$$f(x) = \frac{a}{2}\log\left(\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{a-\sqrt{a^2-x^2}}\right) - \sqrt{a^2-x^2}, \;\; a > 0$$

(a) Demuestre que $f'(x) = \frac{-\sqrt{a^2-x^2}}{x}$

(b) La tangente trazada a la curva definida por $y = f(x)$ en un punto $P(x_0, y_0)$ cualquiera de ella, corta al eje OY en un punto T. Pruebe que la longitud PT es constante (independiente de $P(x_0, y_0)$).

Problema 3. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua tal que:

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{f(x)}{x^2} = 0$$

Entonces se tiene que $\exists a \in \mathbb{R}$ tal que $\forall x \in \mathbb{R},\; f(x) + x^2 \geq f(a) + a^2$

Problema 4. Encontrar la recta tangente a la curva de ecuación:

$$e^{2\arcsin(yx)} = \log(1 + x^2 + y^2)$$

en el punto P donde la curva intersecta al eje de abscisas ($y = 0$), con abscisa positiva.($x > 0$).

Problema 5. Encontrar la recta tangente a la curva de ecuación:

$$\log(3/4 + x^2 + y) = \sin(yx)$$

en el punto P donde la curva intersecta al eje de abscisas ($y = 0$), con abscisa positiva.($x > 0$).