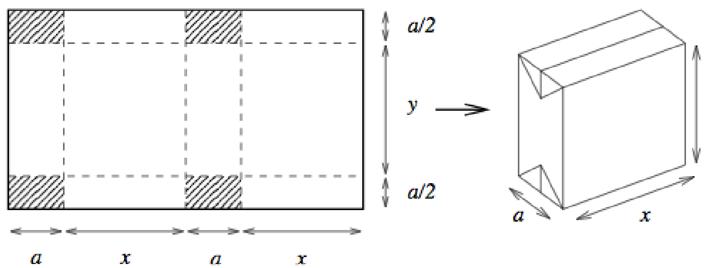
CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

Aux 3, Martes 25 de Agosto

Problema 1. Consideremos un envase de TetraPak que es fabricado plegando un rectángulo de cartón de la siguiente manera:



Se desean determinar las dimensiones óptimas a, x, y tales que minimicen la superficie del rectángulo original para un volumen total de 1000 (un litro).

(a) Encuentre una expresión para la superficie sólo en términos de las cantidades a, x.
(b) Tomando a como parámetro conocido, demuestre que el valor $x = x(a)$ que minimiza dicha superficie es $x = \sqrt{\frac{1000}{a}}$. Justifique que se trata de un mínimo.
(c) Use (b) para obtener una expresión de $S(a)$ para la superficie en función solamente de a y luego determine el valor mínimo de esta función. (Justifique por qué es mínimo). Explicite los valores óptimos de a, x, y.

Problema 2. Se dispone de un alambre de largo $3a$, con el cual se desea formar un trapecio isósceles con tres lados iguales a a y el cuarto de largo x de modo de maximizar su área. Determine el valor de x que cumple con esta condición extremal. Justifique su respuesta.

Problema 3. Una planta productora de cobre con capacidad instalada máxima de 9ton/día, puede producir x toneladas de cobre corriente e y toneladas de cobre fino diarias. Si se sabe que las producciones diarias de cobre fino y corriente cumplen la relación $y = \frac{40-5x}{10-x}$ y que el precio de venta del cobre fino es 3.6 veces el precio del cobre corriente, se pide determinar cuál es la producción diaria que proporciona un ingreso máximo.

Problema 4. Considere la función $f(x) = (x+1)\ln\left(\left|\frac{x+1}{x}\right|\right)$, definida en $\mathbb{R} \setminus -1, 0$

(a) Encuentre ceros y signos de f.
(b) Estudie las asíntotas horizontales de f. Encuentre los límites laterales cuando $x \to 0^{\pm}$ y $x \to -1^{\pm}$ y ya sea, repare la función para que sea continua, o bien, detecte si hay asíntotas verticales.
(c) Use el teorema del valor medio en la función auxiliar $g(x) = \ln|x|$ en el intervalo $[x, x+1]$ para probar que

$$\frac{1}{x+1} < \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) < \frac{1}{x}, \quad \forall x \in (-\infty, -1) \cup (0, \infty)$$

(d) Calcule la primera derivada de f. Use el resultado de la parte anterior para concluir sobre el crecimiento de f en $(-\infty, -1)$ y en $(0, \infty)$.
(e) Calcule $f''(x)$ e indique los intervalos donde f es cóncava y donde es convexa.

(f) Estudie los límites de $f'(x)$ cuando $x \to -1^+$ y cuando $x \to 0^-$. Usando el signo de la segunda derivada en $(-1, 0)$ concluya sobre la monotonía de f' en dicho intervalo y pruebe que existe un único punto donde $f'(x) = 0$. Bosqueje el gráfico de f.