## CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

Aux 4, Jueves 23 de Agosto

**Problema 0.** Sean $a_1, a_2, ..., a_N \in \mathbb{R}$ tales que $a_i > 0,\ \forall i$. Suponga adems que:

$$f(x) = a_1^x + a_2^x + ... + a_N^x \geq N, \forall x \in \mathbb{R}$$

Demuestre que $f$ tiene un mínimo global, y pruebe que:

$$a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_N = 1$$

**Problema 1.**

(a) Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones crecientes y derivables de signo constante: $g < 0$ y $h > 0$. Dadas las constantes $a, b, c > 0$, estudie la monotonía de:

$$f(x) = g(b - ax^3)h(Arctg(cx))$$

(b) Usando el TVM, demuestre que:

$$1 + \ln x < (x+1)\ln(x+1) - x\ln x < 1 + \ln(x+1), \quad \forall x > 0$$

Deduzca que:

$$n \ln n - (n-1) \leq \ln 1 + \ln 2 + ... + \ln n < (n+1)\ln(n+1) - n, \quad \forall n \geq 1$$

**Problema 2.**

(a) $y = f(x)$ está definida implicitamente por $x^2 + xy + y^2 - 3 = 0$. Demuestre que el punto $P(1, -2)$ es un mínimo local de $f$. (Requiere convexidad!!)

(b) Verifique que la derivada de $f(x) = \arcsin(2x-1) + 2\arctan\sqrt{(1-x)/x}$ es nula en $[0,\ 1)$.

**Problema 3.** Dados $a, b > 0$, estudie el creciemiento de la función $f(x) = (a^x + b^x)^{1/x}$ en el intervalo $(0, +\infty)$

**Problema 4.** Sean $0 < a < b$. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, contínua en $[a, b]$, derivable en $(a, b)$, con $f(a) = f(b) = 0$ y $f'(a) = 0$. Demuestre que existe $c \in (a, b)$ de modo que la tangente a $f$ en el punto $c$ pasa por el orígen. Analice que pasa si $a = 0$

**Problema 5.** Determine el mayor volumen de un cilindro de radio $r$ y altura $h$, donde $P = (h, r)$ recorre la recta de ecuación: $L : ay + bx = ab, a, b > 0$.