CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

Aux 6, Jueves 10 de Septiembre

Problema 0. Usando el método de las fracciones parciales calcule:

$$\int \frac{x}{(x+1)(x^2+1)}dx$$

Problema 1. Sea f impar e integrable en $[-a,a]$.

- Pruebe que:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

- Sea $g(x) = \frac{1+x^3}{\cos^2 x}$ en $[-\pi/4, \pi/4]$. Calcule:

$$\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} g(x)\ dx$$

Problema 2. Calcule

$$\lim_{x\to\pi} \frac{e(x^2-\pi^2) + \pi \int\limits_{x^2}^{\pi^2} \frac{e^{\sin(\frac{1}{2}\sqrt{t})}}{\sqrt{t}}}{1+\cos x}$$

Problema 3. Sea $F(x) = \int_0^x (u-x)f'(u)du$, con f' integrable. Pruebe que:

$$F'(x) = f(0) - f(x)$$

Problema 4. Demuestre que:

$$|\int\limits_{1}^{\sqrt{3}} \frac{e^{-x}\sin x}{1+x^2}dx| \leq \frac{\pi}{12e}$$

Problema 5. Demuestre que si f es T-periódica e integrable, entonces:

$$\int\limits_{a}^{a+T} f(x)dx = \int\limits_{0}^{T} f(x)dx$$

Problema 6. Sea $I_{m,n} = \int_0^1 x^n(1+x)^m dx$. Demuestre que se satisface:

$$(m+1)I_{m,n} + nI_{m+1,n-1} = 2^{m+1}$$

Problema 7. Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ integrable, tal que f satisface

$$xf(y) + yf(x) \leq 1 \quad \forall x, y \in [0,1]$$

Pruebe que:

$$\int_0^1 f(x)dx \leq \frac{\pi}{4}$$

Problema 8. Sea f integrable. Calcule

$$\int_0^{\pi/2} \frac{f(\sin x)}{f(\sin x)+f(\cos x)}dx$$

Problema 9. Usando sumas de Riemann pruebe que si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es integrable y $f\geq 0$, entonces f^2 es integrable en $[a,b]$

Problema 10. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ derivable, con derivada contínua. Si $a,b\in\mathbb{R}$, con $a<b$ son tales que $f(a)=f(b)=0$ y $\int_a^b f^2=1$. Demuestre que:

$$\int_a^b xf(x)f'(x)=-1/2$$

Problema 11. Sea $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ contínua en $[0,1]$ y diferenciable en $(0,1)$ tal que $f(0)=0$ y $\forall x\in(0,1)$ $0\leq f'(x)\leq 1$.
Se pide probar que: $[\int_0^1 f(t)dt]^2\geq\int_0^1 f(t)^3dt$.

(a) Pruebe que $\forall x\in[0,1]$ $f(x)\geq 0$

(b) Defina $G:[0,1]\to\mathbb{R}$ mediante:

$$G(x)=2\int_0^x f(t)dt-f(x)^2$$

Muestre que G es creciente y deduzca que $\forall x\in[0,1]$ $G(x)\geq 0$

(c) Defina $F(x)=[\int_0^x f(t)dt]^2-\int_0^1 f(t)^3dt$. Pruebe que $F'(x)=f(x)G(x)$, establezca el crecimiento de F y deduzca que $F(x)\geq 0$ $\forall x\in[0,1]$.
Concluya.

Problema 12. Sea $G(x)=\int_0^1 e^{-|x-y|}f(y)dy$. Calcule $G'(x)$