CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

Aux 7, Viernes 26 de Septiembre

Sumas de Riemann. La idea en general es tratar de transformar la serie en una integral definida, de la siguiente manera:
-Identificar la Partición
-Identificar los límites de integración
-Calcular la itegral definida.

Problema 1. Calcule las siguientes Sumas de Riemann:

1. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k \sinh(k/n)$
2. $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \dfrac{k}{n\sqrt{n^2+k^2}}$
3. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} (k\sqrt{n^2-k^2})$

Recordemos que la suma inferior asociada a la partición $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, ..., P_n\}$ es $s(P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$ y la suma superior es $S(P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$.
Donde $M_i = \sup\{f(x),\ \ x \in [P_i, P_{i+1})\}$ y $m_i = \inf\{f(x),\ \ x \in [P_i, P_{i+1})\}$.
La función f se dirá integrable si $S(P) - s(P) \to 0$ a medida que la partición se refina.
Algunas consecuencias directas (o no tanto):
-Si f es creciente, entonces $m_i = f(P_i)$ y $M_i = f(P_{i+1})$, o sea se alcanza al principio del sub intervalo (o al final respect.)
-Si la partición es equiespaciada, entonces $\Delta x_i = \Delta x$, no depende del subintervalo,
y además $\Delta x = \frac{largo\ \ del\ \ intervalo}{n}$

Problema 2. Sea f creciente en $[0,1]$. Probar que:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(\frac{i}{n}) - \int_0^1 f(x)dx \leq \frac{f(1) - f(0)}{n}$$

Problema 3. Sea $f : [1, n) \to \mathbb{R}$ una función no negativa y creciente.

- Usando la partición $P = \{1, 2, ..., n\}$ pruebe que:

$$\sum_{i=1}^{n-1} f(i) \leq \int_1^n f(x)dx \leq \sum_{i=2}^{n} f(i) \quad \forall n \geq 2$$

- Considere $f(x) = \ln(x)$, demuestre que:

$$(n-1)! \leq n^n e^{-n+1} \leq n! \quad \forall n > 0$$

Problema 4.

(a) Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función Riemann integrable en el intervalo $[a,b]$. Compruebe que $-f$ también es integrable, y que:

$$\int_a^b -f = -\int_a^b f$$

(b) Sean f,g dos funciones acotadas en $[a,b]$. Se sabe que f es integrable en $[a,b]$ y que para cierto punto $c\in[a,b]$,

$$g(c)\neq f(c)$$
$$g(x)=f(x),\forall x\in[a,b]\setminus c$$

Pruebe que:

$$\int_a^b f=\int_a^b g$$

Problema 5. Pruebe que $f(x)=\ln(x)$ es integrable en $[1,2]$, use la partición siguiente: $P=\left\{1,\frac{n+1}{n},...,\frac{n+n}{n}=2\right\}$.

Problema 6. Considere la sucesión $a_n=\int_0^n q^x dx$, con $0<q<1$.

(a) Explique porqué (a_n) está bien definida, es decir, porqué q^x es Riemann integrable en $[0,n]$, y muestre que es estrictamente creciente.

(b) Calcule las sumas de Riemann inferior y superior para q^x y la partición $P=\{0,1,...,n\}$.

(d) Utilice las sumas para obtener las siguientes cotas para (a_n).

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \ q\frac{1-q^n}{1-q}<\int_0^n q^x dx<\frac{1}{1-q}$$

(c) Concluya que (a_n) converge y que $a=\lim a_n$ satisface:

$$\frac{q}{1-q}\leq a\leq\frac{1}{1-q}$$

Ejemplo de función NO INTEGRABLE. Consideremos la función de Dirichlet:

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x \text{ es racional}\\ 0 & \text{si } x \text{ es irracional}\end{cases}$$

Notemos que para cualquier partición $P=\{x_0,...,x_n\}$ de $[0,1]$ se tiene que $m_i=0,\ M_i=1$, por lo tanto:

$$s(P)=0,\ \ S(P)=1$$

La diferencia no se va a 0, a medida que refino la partición.