CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

Aux N, Jueves 5 de Noviembre

Problema 1. Considere la curva Γ parametrizada por:

$$\vec{\sigma}(t) = (e^t \cos(t), e^t \sin(t), e^t) \quad , t \in \mathbb{R}$$

(i) Demuestre que la curva se mueve sobre el manto del cono $z^2 = x^2 + y^2$.
(ii) Encuentre la función longitud de arco de σ.
(iii) Encuentre la parametrización en longitud de arco de σ.
(iiii) Encuentre los vectores tangente, normal, binormal, la torsión y la curvatura.

Problema 2. Calcule el largo de la *lenteja*, formada por las ecuaciones $y = x^2$ y $x = y^2$, en el primer cuadrante

Problema 3. Considere la curva Γ que se forma al intersectar las superficies:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 4 \\ x^2 + z^2 &= 4 + y^2 \end{aligned}$$

tomando en cuenta sólo la parte de la curva con $z > 0$.

(a) Encuentre una parametrización de Γ.
Indicación: Use coordenadas cilíndricas.

(b) Calcule el centro de masa suponiendo densidad lineal de masa dada por $d(x, y, z) = xy$. Puede usar argumentos de simetría.

Problema 4. Sea Γ el grafo de una función diferenciable $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Determine una fórmula para la longitud de Γ. Suponiendo que f es dos veces diferenciable, pruebe que la curvatura en el punto $(x, f(x))$ viene dada por

$$\kappa(x) = \frac{|f''(x)|}{|1 + f'(x)^2|^{\frac{3}{2}}}$$