Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

MA1002-04 Cálculo Diferencial E Integral
Auxiliar Examen
Profesor: Raul Gormaz A.
Auxiliares: Sergio Castillo J. y Carlos Duarte C.
Semestre Primavera 2009
Fecha: Jueves 26 de Noviembre de 2009

P1.- Si se sabe que $a_n(n^3 - n + 1)$ converge a 1, determine el radio de convergencia y el intervalo de convergencia de la serie de potencias $\sum n a_n x^n$.

P2.- Considere la integral $I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n(x)dx$. Demuestre que:
a) Para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $I_{n+1} < I_n$.
b) Para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $I_{n+2} + I_n = \frac{1}{n+1}$
c) Para todo $n > 1$ se cumple $\frac{1}{2(n+1)} < I_n < \frac{1}{2(n-1)}$

P3.- Sea $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ una función creciente, continua en $[0, +\infty)$, derivable en $(0, +\infty)$ y tal que $f(0) = 0$. Demuestre que la función

$$F(x) = x \int_0^x f^2(t)dt$$

es creciente y convexa en $[0, +\infty)$.

P4.- Estudie la convergencia de la integral impropia

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx$$

donde $f(x) = \frac{e^x}{x^x}$.

P5.- Considere la función $F : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = \int_1^x \left(\frac{t-1}{1+t^3} \right) dt$$

a) Encuentre ceros y signos de F y determine si existen o no los límites de $F(x)$ cuando $x \to -1$ y cuando $x \to +\infty$.
b) Calcule $F'(x)$ e indique los crecimientos de F
c) Calcule $F''(x)$. Pruebe que los signos de F'' son los mismos que los del polinomio P de la parte (a). Use esto para indicar las concavidades e inflexiones de F. Bosqueje el gráfico de F.

P6.- Calcule

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan x)dx$$

Hint: Podría usar el cambio de variables $x - \frac{\pi}{4} - u$.

P7.- Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} \int_0^{x^2+1} \frac{e^{-t}}{\sqrt{1+t}} dt & \text{si } x \neq 0 \\ -2\alpha e & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

donde $\alpha = \int_0^1 e^{-z^2} dz$ es un valor conocido.

a) Pruebe que f es par, encuentre los ceros de f y estudie su continuidad para $x \neq 0$.

b) Demuestre que

$$\lim_{x \to 0^+} \int_0^{x^2-1} \frac{e^{-t}}{\sqrt{1+t}} dt = -2ae$$

y concluya que f es continua en $x = 0$.

c) Calcule $f\,'(x)$ y $f\,''(x)$ para $x > 0$, y estudie crecimiento y convexidad para $x > 0$.

d) Demuestre que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2e(\sqrt{\pi}/2 - \alpha)$$

sabiendo que $\int_0^{-\infty} e^{-z^2} dz = \sqrt{\pi}/2$

e) Bosqueje el gráfico de f en $\mathbb{R}$, indicando su recorrido, mínimos y máximos.

P8.- Estudie la convergencia de las siguientes series

$$\sum \cos(k\pi)\sin(1/k) \qquad \sum \frac{2^k k!}{k^k} \qquad \sum k^2(k^2(\cos(1/k) - 1))^k$$

P9.- Estudie el polinomio $P(x) = 2 + 3x^2 - x^3$, indicando crecimientos, máximos y mínimos locales y signos. En particular, pruebe que $\exists x_0 \in [3, 4]$ donde $P(x_0) = 0$.