Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

MA1002-04 Cálculo Diferencial E Integral
Auxiliar Examen
Profesor: Raul Gormaz A.
Auxiliares: Sergio Castillo J. y Carlos Duarte C.
Semestre Primavera 2009
Fecha: Jueves 26 de Noviembre de 2009

P1.- Si se sabe que $a_n(n^3 - n + 1)$ converge a 1, determine el radio de convergencia y el intervalo de convergencia de la serie de potencias $\sum n a_n x^n$.

Solución: Busquemos el radio de convergencia usando el criterio de la raiz, usando el enunciado y recordando que $\lim \sqrt[n]{n} = 1$

$$r = \lim \sqrt[n]{|n a_n x^n|} = \lim |x| \sqrt[n]{n\,|a_n|} = \lim |x| \sqrt[n]{n} \cdot \frac{\sqrt[n]{|a_n|\,(n^3 - n + 1)}}{\sqrt[n]{n^3 - n + 1}} = |x|$$

Con lo cual se tiene que $R = 1$, ya que $\rho = 1$. Ahora veamos los extremos

Si $|x| = 1$, nos conviene hacer convergencia absoluta, con esto veamos si $\sum |n a_n x^n| = \sum n\,|a_n|$ converge, lo último se puede escribir como

$$\sum \frac{n}{n^3 - n + 1} \cdot |a_n|\,(n^3 - n + 1)$$

La convergencia de esta serie se verifica usando el criterio de comparación de series usando $\sum \frac{1}{n^2}$, con lo cual se tiene que

$$c = \lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{\frac{n}{n^3-n+1} \cdot |a_n|\,(n^3 - n + 1)}{\frac{1}{n^2}} = \lim \frac{n^3}{n^3 - n + 1} \cdot \lim |a_n|\,(n^3 - n + 1) = 1$$

Con esto, se tiene que la serie $\sum n a_n x^n$ converge absolutamente y, por ende, converge condicionalmente. Con esto, se tiene que el intervalo de convergencia es $[-1, 1]$

P2.- Considere la integral $I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n(x) dx$. Demuestre que:

a) Para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $I_{n+1} < I_n$.

Solución: En el intervalo $[0, \frac{\pi}{4}]$ se sabe que $0 \leq \tan x \leq 1$, por lo tanto, para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$\tan^{n+1}(x) \leq \tan^n(x) \quad \forall x \in [0, \frac{\pi}{4}]$$

De aquí se deduce que $I_{n+1} \leq I_n$. Para probar la desigualdad estricta, basta notar que para $x = \frac{\pi}{8}$ se tiene que $\tan x < 1$, y por lo tanto $\tan^{n+1} x < \tan^n x$.

b) Para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $I_{n+2} + I_n = \frac{1}{n+1}$

Solución: Integrando directamente se tiene que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple

$$I_{n+2}+I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x(\tan^2 x+1)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \sec^2 x dx = \frac{\tan^{n+1}(\frac{\pi}{4}) - \tan^{n+1}(0)}{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

c) Para todo $n > 1$ se cumple $\frac{1}{2(n+1)} < I_n < \frac{1}{2(n-1)}$

Solución: Usando la parte a) se tiene que para todo $n > 1$ se cumple que $\frac{1}{2}(I_{n+2} + I_n) < I_n < \frac{1}{2}(I_n + I_{n-2})$, y así usando b) se concluye.

P3.- Sea $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ una función creciente, continua en $[0, +\infty)$, derivable en $(0, +\infty)$ y tal que $f(0) = 0$. Demuestre que la función

$$F(x) = x \int_0^x f^2(t)dt$$

es creciente y convexa en $[0, +\infty)$.

Solución: Para ver crecimiento, calculamos la primera derivada de F

$$F\,'(x) = \int_0^x f^2(x)dx + xf^2(x) \geq 0$$

Debido a que, como f es una función creciente y $f(0) = 0$, entonces $f^2(0) = 0$, por lo cual la integral $\int_0^x f^2(t)dt$ es positiva.
Ahora, la segunda derivada

$$F\,'\,'(x) = f^2(x) + f^2(x) + 2xf(x)f\,'(x) = 2(f^2(x) + xf(x)f\,'(x)) \geq 0$$

Debido a que f es creciente, o sea $f\,'(x) \geq 0$, y lo demás es claramente positivo, por lo cual F es convexa

P4.- Estudie la convergencia de la integral impropia

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx$$

donde $f(x) = \frac{e^x}{x^x}$.

Solución: Notemos que la función es decreciente en $[1, \infty)$, recordando que $x^x = e^{x \ln x}$

$$f\,'(x) = \frac{e^x x^x - e^x(x^x \ln x + x^x)}{x^{2x}} = -f(x) \ln x < 0$$

Con esto, podemos usar el criterio de la integral, quien nos facilita el problema ya que para analizar la convergencia de la integral podemos equivalentemente ver la convergencia de la serie

$$\sum \frac{e^n}{n^n}$$

Usando así el criterio de la raiz, se tiene que

$$c = \lim \sqrt[n]{\frac{e^n}{n^n}} = \lim \frac{e}{n} = 0$$

Con esto, la serie y la integral convergen.

P5.- Considere la función $F : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = \int_1^x \left(\frac{t-1}{1+t^3}\right) dt$$

a) Encuentre ceros y signos de F y determine si existen o no los límites de $F(x)$ cuando $x \to -1$ y cuando $x \to +\infty$.
b) Calcule $F\'(x)$ e indique los crecimientos de F
c) Calcule $F\'\'(x)$. Pruebe que los signos de $F\'\'$ son los mismos que los del polinomio P de la parte (a). Use esto para indicar las concavidades e inflexiones de F. Bosqueje el gráfico de F.

Solución: Propuesto... inspírese en la P7.

P6.- Calcule

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan x) dx$$

Hint: Podría usar el cambio de variables $x - \frac{\pi}{4} - u$.

Solución: Usando el cambio de variables sugerido, la integral se transforma en

$$I = -\int_{\frac{\pi}{4}}^{0} \ln\left(1 + \tan\left(\frac{\pi}{4} - u\right)\right) du = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1 + \frac{1 - \tan u}{1 + \tan u}\right) du = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\frac{2}{1 + \tan u}\right) du$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln 2 du - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1 + \tan u\right) du = \frac{\pi}{4} \ln 2 - I$$

Por lo cual, despejando I, se tiene que $I = \frac{\pi}{8} \ln 2$.

P7.- Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} \int_0^{x^2-1} \frac{e^{-t}}{\sqrt{1+t}} dt & \text{si } x \neq 0 \\ -2\alpha e & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

donde $\alpha = \int_0^1 e^{-z^2} dz$ es un valor conocido.

a) Pruebe que f es par, encuentre los ceros de f y estudie su continuidad para $x \neq 0$.

Veamos que la función efectivamente es par, o sea que $f(-x) = f(x)$

$$f(-x) = \int_0^{(-x)^2-1} \frac{e^{-t}}{\sqrt{1+t}} dt = \int_0^{x^2-1} \frac{e^{-t}}{\sqrt{1+t}} dt = f(x)$$

Ahora veamos que la función es continua en $x \neq 0$. Notemos que la función $\frac{e^{-t}}{\sqrt{1+t}}$ es continua para $t > -1$ por álgebra de funciones continuas, por lo cual debemos tener presente que todos los valores que puede tomar la definan. notemos que $x > 0$, lo que implica que $x^2 > 0$, así $x^2 - 1 > -1$, por lo cual la función que hay dentro de la integral es continua, por lo cual la integral es continua.

b) Demuestre que

$$\lim_{x \to 0^+} \int_0^{x^2-1} \frac{e^{-t}}{\sqrt{1+t}} dt = -2ae$$

y concluya que f es continua en $x = 0$.

Aquí, tomando $z = \sqrt{1+t}$ se tiene que $dz = \frac{dt}{2z}$, así

$$\lim_{x \to 0^+} \int_0^{x^2-1} \frac{e^{-t}}{\sqrt{1+t}} dt = \lim_{x \to 0^+} \int_1^{x} \frac{e^{-z^2+1}}{z} 2z dz = 2e \lim_{x \to 0^+} \int_x^{1} e^{-z^2} dz = -2e \int_0^1 e^{-z^2} dz$$

Lo último es igual a $-2ae$. Por lo cual f es continua en $x = 0$

c) Calcule $f'(x)$ y $f''(x)$ para $x > 0$, y estudie crecimiento y convexidad para $x > 0$.

Sea $x > 0$, calculamos las derivadas

$$f'(x) = \frac{e^{-(x^2-1)}}{\sqrt{1+x^2-1}} 2x = 2e^{-x^2+1}$$

$$f''(x) = -4xe^{-x^2+1}$$

Como $f\,'(x) > 0$, claramente la función es creciente, y como $f\,''(x) < 0$, la función es cóncava, todo esto para $x > 0$.

d) Demuestre que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2e(\sqrt{\pi}/2 - \alpha)$$

sabiendo que $\int_0^{-\infty} e^{-z^2}dz = \sqrt{\pi}/2$

Pdemos utilizar el cambio de variable $z = \sqrt{1+t}$ de la parte b) para tener que

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\int_1^x \frac{e^{-z^2+1}}{z}2zdz = 2\lim_{x\to\infty}\int_1^x e^{-z^2+1}dz = 2e\lim_{x\to\infty}\int_1^\infty e^{-z^2}dz$$

$$= 2e\left(\int_0^\infty e^{-z^2} - \int_0^1 e^{-z^2}\right) = 2e\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} - a\right)$$

e) Bosqueje el gráfico de f en $\mathbb{R}$, indicando su recorrido, mínimos y máximos.

Mínimos y máximos: Se obtienen a partir de $f\,'(x) = 0$, $2e^{-x^2+1} = 0$, con lo cual se nota que no se pueden ver minimos y máximos por esta vía. Ahora, notando que la función f tiene un mínimo local en 0.

Recorrido: Es claro según lo anterior, que el recorrido de f es $[2ae, 2e\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} - a\right)[$

P8.- Estudie la convergencia de las siguientes series

$$\sum \cos(k\pi)\sin(1/k) \qquad \sum \frac{2^k k!}{k^k} \qquad \sum k^2(k^2(\cos(1/k)-1))^k$$

Solución:

a) $\sum \cos(k\pi)\sin(1/k)$

Notemos que $\cos(k\pi) = (-1)^k$ por lo cual estamos en presencia de una serie alternante. Como $\frac{1}{k}$ decrece y la función sin() es una función creciente en $[0,1]$, se deduce que $\sin(1/k)$ es decreciente. Por lo tanto, usando el criterio de Leibnitz se deduce que la serie converge

Ahora, si se examina convergencia absoluta se tiene que $\sum|\cos(k\pi)\sin(1/k)| = \sum \sin(1/k)$, la cual converge ya que es comparable con la serie armónica $\sum \frac{1}{k}$. Por lo tanto la convergencia de la serie pedida es solo condicional

b) $\sum \frac{2^k k!}{k^k}$

Primero notemos que los términos son positivos, por lo cual usando el criterio del cuociente se tiene que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{2^{k+1}(k+1)!}{(k+1)^{k+1}} \cdot \frac{k^k}{2^k k!} = \lim_{k\to\infty} \frac{2}{(k+1)^k} \cdot \frac{k^k}{1} = \frac{2}{e} < 1$$

Como el límite es menor que 1, la serie pedida converge

c) Usemos criterio de la raiz k-esima a la serie de los módulos, ya que analizamos la convergencia absoluta primero

$$\lim_{k\to\infty}(\sqrt[k]{k})^2\left|\frac{\cos(1/k)-1}{(1/k)^2}\right|=\frac{1}{2}$$

Luego la serie converge absolutamente, por lo cual converge condicionalmente.

P9.- Estudie el polinomio $P(x)=2+3x^2-x^3$, indicando crecimientos, máximos y mínimos locales y signos. En particular, pruebe que $\exists x_0\in[3,4]$ donde $P(x_0)=0$.

Solución: Estudiemos mínimos y máximos

$$P\acute{}(x)=6x-3x^2=0\Rightarrow 3x(2-x)=0\Rightarrow x=0,\ x=2$$

Quienes son candidatos a máximo y mínimo. Calculando la segunda derivada

$$P\acute{}\acute{}(x)=6-6x\Rightarrow P\acute{}\acute{}(0)=6>0,\ \ P\acute{}\acute{}(2)=-6<0$$

Con lo cual se tiene que $x=0$ es un mínimo local y $x=2$ es su máximo local

Ahora notemos que $P(3)=2+3\cdot3^2-3^3=2$, y $P(4)=2+3\cdot4^2-4^3=-14$, por lo cual se tiene que debido a que la función es continua, que $\exists x_0\in(3,4)$ tal que $P(x_0)=0$