Auxiliar 4 - Introducción al Álgebra
Escuela de Ingeniería, Universidad de Chile

24 de Agosto, 2009

Profesora Cátedra: Maya Stein
Profesores Auxiliares: Victor Carmi Lara - Matías Godoy Campbell

Pregunta 1. Se dice que una funcion f es *estrictamente creciente* si: $\forall x, y \in Dom(f)$ con $x < y$ se tiene $f(x) < f(y)$. Pruebe entonces que:

a) Toda función estrictamente creciente es inyectiva.
b) Si $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ y f es estrictamente creciente, es f biyectiva?

Pregunta 2. Considere las funciones $f, g : A \to B$ con $A, B \neq \emptyset$ y f inyectiva. Se define $\varphi : A \to B \times B$ como $\varphi(x) = (f(x), g(x))$ para cada $x \in A$.
Pruebe que φ es inyectiva.
Indicación: Recuerde que $(a, b) \neq (c, d) \Leftrightarrow [(a \neq c) \vee (b \neq d)]$

Pregunta 3. Sea la función $f : A \subseteq \mathbb{R} \to B \subseteq \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - 6x + 11$. Determine A y B de modo que f sea biyectiva, luego, calcule f^{-1}
Indicación: Una función de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ es simétrica respecto a la recta de ecuación $x = \frac{-b}{2a}$

Pregunta 4. Considere el conjunto $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ es biyectiva}\}$ Es decir, los elementos de $\mathcal{F}$ son funciones biyectivas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Se define la función $\Psi : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ dada por:

$$\Psi(f, g) = (f \circ g)^{-1}$$

a) Justifique el hecho que $\forall (f, g) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F}$. $\Psi(f, g) \in \mathcal{F}$.
b) Pruebe que Ψ es sobreyectiva, pero no inyectiva.
c) Demuestre que para todo par $(f, g) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F}$ se tiene:

$$\Psi(\Psi(f, g), \Psi(g^{-1}, f^{-1})) = id_{\mathbb{R}}$$

d) (Propuesto) Sean $f_1, g_1, f_2, g_2 \in \mathcal{F}$ definidas por: $f_1(x) = 2x+3$, $g_1(x) = x^3$, $f_2(x) = 5x^3+4$ y $g_2(x) = \frac{x}{2}$. Considere el conjunto $A = \{(f_1, g_1), (f_2, g_2)\}$ Determine $\Psi(A)$

Pregunta 5. Sea $f : A \to B$ y $C \subseteq A$. Se define: $g : C \to B$ tal que $g(x) = f(x) \quad \forall x \in C$
Demuestre que: $\forall D \subseteq B, \quad g^{-1}(D) = C \cap f^{-1}(D)$

Trabajo Dirigido.

a) Sea $U \neq \emptyset$ un conjunto universo. Se define la función $f : \mathcal{P}(U) \times \mathcal{P}(U) \to \mathcal{P}(U)$ por $f(X, Y) = X \setminus Y$.
Pruebe que $f^{-1}(\{U, \emptyset\}) = \{(U, \emptyset)\} \cup \{(X, Y) \in \mathcal{P}(U) \times \mathcal{P}(U) : X \subseteq Y\}$
b) Considere las funciones $f(x) = 3 - 2x$ y $g(x) = \frac{x}{2} - 2$. Pruebe que ambas son funciones biyectivas, pero sin embargo la función definida por

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \leq 2 \\ g(x) & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

No es biyectiva.