Auxiliar 6 - Introducción al Álgebra
Escuela de Ingeniería, Universidad de Chile

Lunes 7 de Septiembre, 2009

Profesora Cátedra: Maya Stein
Profesores Auxiliares: Victor Carmi Lara - Matías Godoy Campbell

Pregunta 1. Demuestre usando inducción que: $\forall n \in \mathbb{N}$ se tiene:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{n}$$

Pregunta 2. Pruebe por inducción los siguientes resultados:

a) $\forall n \in \mathbb{N}$ un tablero de $2^n \times 2^n$ al cual se le remueve un casillero puede ser cubierto por triminoes (figura que cubre 3 casilleros, similar a una L)
b) $\forall n \in \mathbb{N}$ La suma de los ángulos interiores de un polígono de n lados es $(n-2)\cdot 180$
c) La sucesión de Fibonacci se define como $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$, $a_1 = a_2 = 1$. Pruebe que $\forall n \in \mathbb{N}$ se tiene: $a_n < \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$

Pregunta 3. Sean n rectas en el plano, las cuales dividen al plano en R_n regiones, algunas no acotadas. Pruebe que es posible colorear estas regiones, donde dos regiones adyacentes (que comparten un segmento) tienen distinto color, usando dos colores.

Pregunta 4. Se considera la sucesión recurrente definida por:

$$a_{n+1} = a_n^2 - 2, \quad a_1 = 14$$

Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$, el número: $\sqrt{3(a_n^2 - 4)}$ Es divisible por 4.

Pregunta 5. Demostrar que todo número natural $n \geq 24$ se puede escribir como suma de cincos y sietes.

Trabajo Dirigido.

a) Pruebe que para todo entero $n \geq 1$ se tiene que $n^2 + 13n + 6$ es un número par
b) Un estudiante del curso de álgebra ha estudiado arduamente para su control del Sábado, en su estudio, ha probado la siguiente aseveración: Todos los números naturales son iguales a su sucesor, a continuación, se adjunta su demostración:

Supongamos que (H.I.) $n = n + 1$
Para el caso $(n+1)$ basta sumar 1 a cada lado de nuestra H.I.
Luego $n + 1 = n + 1 + 1 = n + 2$ Lo que prueba el caso $n + 1$
Por lo tanto, para cualquier $n \in \mathbb{N}$ $n = n + 1$ más aun, dado que $0 = 0 + 1 = 1$
Entonces se tiene que todos los números naturales son iguales

Explique que está mal en la demostración del estudiante.