Auxiliar Extra Control 2 - Introducción al Álgebra
Escuela de Ingeniería, Universidad de Chile

Jueves 22 de Octubre, 2009

Profesora Cátedra: Maya Stein
Profesores Auxiliares: Victor Carmi Lara - Matías Godoy Campbell

Pregunta 1. Pruebe el resultado o determine el valor, según corresponda, las siguientes sumatorias:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = np$

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(1-x)^k = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n+1}{k+1}x^k$

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\cdot f\left(1+\frac{1}{k}\right)$ con f una función que satisface: $f(x\cdot y) = f(x) + f(y)$ y $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = -f(x)$

Indicación: Puede ser útil determinar el valor de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k)$

d) $\displaystyle\sum_{i=2}^{n} \frac{1}{\log_i n!}$

Pregunta 2. Definimos $\Psi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ por: $\Psi_1(x_0, x_1) = x_0 + x_1$. Luego, para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $\Psi_n : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ por:

$$\Psi_n(x_0, \ldots, x_n) = \Psi_{n-1}(x_0, \ldots, x_{n-1}) + \Psi_{n-1}(x_1, \ldots, x_n)$$

Pruebe por inducción que: $\Psi_n(x_0, \ldots, x_n) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}x_j$

Pregunta 3. Sea E un conjunto numerable. En $\mathcal{P}(E)$ se define la relación $\mathcal{R}$ por:

$$A\mathcal{R}B \Leftrightarrow \exists\ f : A \to B,\ f \text{ biyectiva}$$

Se puede probar que $\mathcal{R}$ es relación de equivalencia (Propuesto). Pruebe entonces que la clase de equivalencia de un conjunto infinito $A \in \mathcal{P}(E)$, es la colección de los subconjuntos numerables de E, es decir $[A]_{\mathcal{R}} = \{X \subseteq E \mid X \text{ es numerable}\}$. Indique, dos elementos distintos en $[A]_{\mathcal{R}}$, si $A \neq E$

Pregunta 4. Considere el conjunto:

$$C = \{x \geq 0 \mid \exists n \in \mathbb{N}^*,\ x^n \in \mathbb{Q}\}$$

Pruebe que C es numerable.
Indicación: Escriba el conjunto C como unión numerable de conjuntos finitos.

Pregunta 5. Considere el conjunto:

$$\mathcal{N} = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid A \text{ es finito}\}$$

Pruebe que $\mathcal{N}$ es numerable.
Indicación: Considere los conjuntos $\mathcal{N}_k = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid |A| = k\}$.