Auxiliar 11 - Introducción al Álgebra
Escuela de Ingeniería, Universidad de Chile

Lunes 26 de Octubre, 2009

Profesora Cátedra: Maya Stein
Profesores Auxiliares: Victor Carmi Lara - Matías Godoy Campbell

Pregunta 1. Se define en $\mathbb{R}$ la ley de composición interna $*$ por: $x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ Se pide:

a) Probar que $(\mathbb{R}, *, \cdot)$ es un cuerpo.
b) Demuestre que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$ es un isomorfismo de $(\mathbb{R}, *, \cdot)$ en $(\mathbb{R}, +, \cdot)$

Pregunta 2. Considere las estructuras algebraicas $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, con la suma y producto usuales, y $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$ en que $\oplus$ y $\odot$ se definen de la siguiente manera:

$$\forall\ a, b \in \mathbb{Z} :\ a \oplus b = a + b + 1$$
$$\forall\ a, b \in \mathbb{Z} :\ a \odot b = a + b + ab$$

Dado lo anterior:

a) Encuentre el neutro para $\odot$
b) Demuestre que existe f tal que:

$$f : (\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}, \oplus) \text{ es isomorfismo}$$
$$f : (\mathbb{Z}, \cdot) \to (\mathbb{Z}, \odot) \text{ es isomorfismo}$$

Encontrando explćitamente f y verificando que cumple lo pedido.
<u>Hint</u>: Si $n \in \mathbb{N}$, note que: $n = \underbrace{1 + \cdots + 1}_{n \text{ veces}}$

c) Demuestre que $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$ es un anillo conmutativo con unidad.
d) Encuentre $b \in \mathbb{Z}$, distinto del neutro para $\odot$ que sea invertible con respecto a $\odot$

Pregunta 3. Considere en $\mathbb{R}^2$ las siguientes operaciones: $(a, b) \oplus (c, d) = (a+c, b+d)$ y $(a, b) \odot (c, d) = (a \cdot c, b \cdot d)$. A partir de esto pruebe que:

a) $(\mathbb{R}^2, \oplus, \odot)$ es anillo conmutativo con unidad
b) $(\mathbb{R}^2, \oplus, \odot)$ posee divisores del cero

Pregunta 4. Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo finito sin divisores del cero. Pruebe que:

a) Si $\exists p \in \mathbb{N}^*$, tal que $\underbrace{1 + \cdots + 1}_{p \text{ veces}} = 0$
b) Si $a,\ b \in \mathbb{N}^*$, entonces:

$$\underbrace{1 + \cdots + 1}_{a \cdot b \text{ veces}} \Rightarrow \underbrace{1 + \cdots + 1}_{a \text{ veces}} \vee \underbrace{1 + \cdots + 1}_{b \text{ veces}}$$