UChile	Cálculo Avanzado y Aplicaciones	Hector Ramirez
FCFM	MA2002-4	Germán Ibarra
DIM	Prim'09	Víctor Riquelme

Clase Auxiliar 1

P1 Considere el campo vectorial:

$$\vec{F}(x,y,z) = \frac{x^2}{x^2+y^2}\hat{\imath} + \frac{xy}{x^2+y^2}\hat{\jmath} + e^z\hat{k}$$

Expreselo en coordenadas cilindricas.

P2 Probar las siguientes identidades:

(a) $div(rot(\vec{F})) = 0$.

(b) $div(f\vec{F}) = fdiv(\vec{F}) + \vec{F}\cdot\nabla f$.

P3 **(a)** Sea $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcion de clase $\mathcal{C}^1$. Demuestre que

$$rot\left(\int_a^b \varphi(\vec{r},t)dt\right) = \int_a^b rot(\varphi)(\vec{r},t)dt$$

Hint: Puede usar la regla de Leibniz $\partial_u \int_a^b f(\vec{r},t)dt = \int_a^b \partial_u f(\vec{r},t)dt$, donde la variable u es cualquier variable cartesiana espacial (la integral es c/r al 'tiempo').
Considere ademas la definicion siguiente: si $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z) : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es un campo vectorial, entonces $\int \vec{F} = (\int F_x, \int F_y, \int F_z)$, donde la integral es con respecto a variables espaciales o temporales).

(b) Considere el campo $\vec{F}(\vec{r}) = g(r)\hat{\theta}$, donde las coordenadas son esfericas, y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^1$. Demuestre que $div(\vec{F}) = 0$, y pruebe que

$$rot(\vec{F}(t\vec{r}) \times t\vec{r}) = 2t\vec{F}(t\vec{r}) + t^2\frac{d}{dt}\vec{F}(t\vec{r}) \tag{1}$$

(c) Sea $\vec{F}$ campo vectorial tal que $div(\vec{F}) = 0$ en una bola $B \subseteq \mathbb{R}^3$ centrada en 0. Se puede probar que la formula (1) es valida en B. Sea $\vec{G}(\vec{r}) = \int_0^1 (\vec{F}(t\vec{r}) \times t\vec{r})dt$. Usando lo anterior concluya que $rot(\vec{G}) = \vec{F}$ en B.

P4 Considere el siguiente sistema de coordenadas, dado por:

$$\vec{r}(x,\rho,\theta) = \begin{pmatrix} x \\ \rho\cos(\theta) \\ \rho\sin(\theta) \end{pmatrix}$$

(a) Determinar el trio de vectores unitarios $\hat{x}, \hat{\rho}, \hat{\theta}$.¿Son ortogonales? Calcular $\hat{\theta}\times\hat{x}$, $\hat{\theta}\times\hat{\rho}$.

(b) Encontrar expresiones para el gradiente, divergencia, laplaciano y rotor en este sistema de coordenadas (para las funciones que correspondan).

(c) Dada $f : [a,b] \to \mathbb{R}_+$ diferenciable, bosqueje la superficie de ecuacion $y^2 + z^2 = f(x)^2$. Verifique que una parametrizacion de esta superficie es

$$\vec{r}_1(x,\theta) = x\hat{\imath} + f(x)\hat{\rho}(\theta)$$