Universidad de Chile

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

Departamento de Ingeniería Matemática

Auxiliar #4 MA3402/MA34B

Profesora: Nancy Lacourly. Auxiliar: Gonzalo Contador.

P1. La oficina de difusión debe decidir a principios de año si hacer o no charlas de Difusión en la sexta región. Para ello, desean estimar la proporción p de estudiantes que quiere estudiar en Beaucheff. Se realiza una encuesta al azar a n personas, de las cuales z quieren entrar a la facultad.

a) Suponga que conoce las respuestas de cada uno de los encuestados, y calcule el estimador de máxima verosimulitud $\hat{p}_{MV}$ de p. ¿Resulta necesario el supuesto inicial? Demuestre que el estimador es insesgado.

b) Verifique consistencia de $\hat{p}_{MV}$.

c) Verifique que el estimador $\hat{p}_{MV}$ alcanza la mínima varianza para estimadores insesgados de p.

d) De la información que maneja Difusión, se tiene la idea de que p se distribuye *a priori* según la densidad $\pi(p) = Cp(1-p)$. Encuentre la distribución *a posteriori* para p dada la muestra.

Nota: Decimos que $X \sim Beta(\alpha, \beta)$ si su función de densidad está dada por $f(x) = \dfrac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}$ para $x \in (0,1)$, con $\Gamma(p) = \int\limits_0^\infty x^{p-1}e^{-x}dx$.

e) Encuentre el estimador bayesiano $\hat{p}_B$ de p para función de pérdida cuadrática.

P2. Sea una m.a.s. $X_1 ... X_n$ de una variable $X \sim Bernoulli(p)$, donde $p \sim Beta(\alpha, \beta)$. Encuentre la distribución a posteriori de p y compare el estimador de los momentos de p con uno obtenido considerándolo como parámetro no aleatorio.

P3. Considere una variable Y, cuya función de densidad, para un parámetro θ desconocido, está dada por

$$f(x) = \frac{x^\theta}{\theta+1}$$

Muestre que, para una m.a.s. $Y_1 .... Y_n$ de Y, el estadístico $\sum ln(Y_i)$ es suficiente para θ.