Pauta P3 Control 2, Primavera 2009

Sea X una variable aleatoria uniformemente distribuida en (0,1). Sea Y una variable aleatoria uniformemente distribuida en (0,X).

- **a)** (3 puntos) Encuentre la densidad conjunta de X e Y.
- **b)** (3 puntos) Encuentre la densidad de Y.

Solución

$$X \sim U(0,1) \qquad\qquad Y \sim U(0,X)$$

a) $f_{X,Y}(x,y)$?

Del enunciado se tiene:

· $f_X(x) = \dfrac{1}{1-0} = 1 \qquad \forall x \in [0,1]$

· Si $X = x \Rightarrow f_Y(y) = \dfrac{1}{x-0} = \dfrac{1}{x}$

$$\Rightarrow f_{Y/X}(y/x) = \frac{1}{x} \qquad \forall y \in [0,x]$$

Luego, por Teorema de densidades condicionales:

$$f_{Y/X}(y/x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} \quad \Rightarrow \quad f_{X,Y}(x,y) = f_{Y/X}(y/x) \cdot f_X(x)$$

Reemplazando por el valor de las expresiones, se concluye:

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{x} \cdot 1 = \frac{1}{x} \qquad 0 \le y \le x \le 1$$

Ahora, para comprobar que $f_{X,Y}(x,y)$ corresponde a una función densidad, hay que demostrar lo siguiente:

1) $f_{X,Y}(x,y) \ge 0$

Como $f_{X,Y}(x,y) = \dfrac{1}{x}$ y $0 \le x \le 1 \quad \therefore f_{X,Y}(x,y) \ge 0$

2) $\iint_{R^2} f_{X,Y}(x,y)\,dxdy = 1$

$$\iint_{R^2} f_{X,Y}(x,y)\,dxdy = \int_0^1 \int_0^x f_{X,Y}(x,y)dydx = \int_0^1 \int_0^x \frac{1}{x}dydx = \int_0^1 \frac{1}{x} \cdot xdx = \int_0^1 dx = 1$$

Se han demostrado las dos condiciones, por lo tanto, $f_{X,Y}(x,y)$ corresponde a una función densidad (dentro de su intervalo correspondiente).

b) $f_Y(y)$?

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx = \int_{y}^{1} \frac{1}{x}\,dx = \ln(1) - \ln(y) = -\ln(y)$$

$$\therefore\ f_Y(y) = -\ln(y)$$

Criterios de Evaluación

- La demostración de que $f_{X,Y}(x,y)$ correspondía a una función densidad en la parte a) no se pedía, por lo tanto, no era obligación hacerla para obtener todo el puntaje.
- Se descuenta 0.5 ptos si se llegó correctamente a la expresión de $f_{X,Y}(x,y)$ en la parte a), pero no se especificó el intervalo donde ésta es válida ($0 \le y \le x \le 1$).