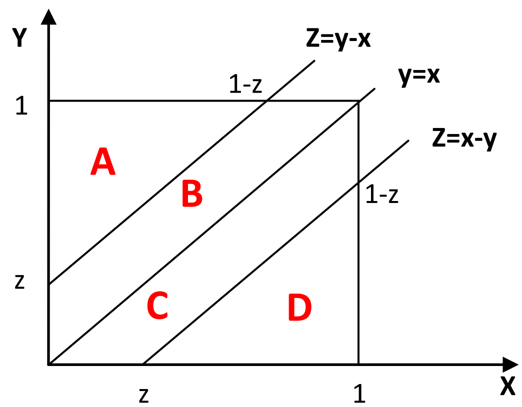
P2.

a.- Pruebe que $F_z(z) = 1 - (1-z)^2$

Primero, nos damos cuenta de que tanto X como Y pueden llegar primero. Por lo tanto

$$z = |x - y| \qquad \text{Por lo tanto } z(x,y) = \begin{cases} x-y, & y < x \\ y-x, & y \geq x \end{cases} \qquad (0.5)$$

Gráficamente se observa que:



(1.0)

Concluimos entonces, que las áreas a integrar son B y C (fijándonos en las restricciones de x y).

Como el gráfico es simétrico, podemos calcular solo el área de B y luego multiplicarla por 2. (0.5)

Para simplificar cálculos, observamos que el área de B puede obtenerse de la siguiente forma:

$$Area_B = \frac{1}{2} - Area_A = \frac{1}{2} - \frac{(1-z)(1-z)}{2} \qquad (0.5)$$

Esto es así dado que A es un triángulo isósceles de lado (1-z)

Finalmente, la función de densidad acumulada para z es:

$$F_z = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{(1-z)^2}{2}\right) = 1 - (1-z)^2 \qquad (0.5)$$

(Para las personas que resolvieron integrando entre los límites apropiados también se considerará correcto, y se utilizará la siguiente pauta de corrección:

Notar que $z = |x - y|$ 0.5

Plantear correctamente la integral 0.5

Escoger límites de integración adecuados 1.5

Llegar al resultado correcto 0.5)

b.- Concluya que "en promedio" la persona que llega primero debe esperar 20 min.

Para resolverlo necesitamos saber la esperanza de la variable z.

Sabemos que la esperanza se calcula como $E(z) = \int_{-\infty}^{\infty} z \cdot f_z dz$ (0.3)

Para obtener la función densidad de z:

Por a.) sabemos que $F_z(z) = 1-(1-z)^2$

$$\Rightarrow f_z = \frac{\partial F_z}{\partial z} = -2 \cdot (1-z) \cdot -1 = 2(1-z) \quad (1.5)$$

Finalmente $E(z) = \int_{-\infty}^{\infty} z \cdot f_z dz = \int_0^1 z \cdot 2(1-z) dz = 2 \cdot \int_0^1 z \cdot (1-z) dz$

$$= 2 \cdot \left[\left(\frac{z^2}{2} \right)_0^1 - \left(\frac{z^3}{3} \right)_0^1 \right] = 2 \cdot \left[\left(\frac{1}{2} - 0 \right) - \left(\frac{1}{3} - 0 \right) \right] = \frac{1}{3} \quad (0.7)$$

Para interpretar el resultado, sabemos que las variables se distribuyen uniformemente en el intervalo (0,1), que corresponde a 1 hr=60 min.

Luego, 1/3 (hr)= 20 minutos. (0.5)