Pendiente Auxiliar N°3. Análisis Combinatorio y Axiomas de Probabilidades

Probabilidades y Estadística - MA3403 - Primavera 2009
Profesor: Fernando Lema
Auxiliares: Abelino Jiménez - Benjamín Palacios

QUEDÓ PENDIENTE PROBAR

A y B independientes $\Rightarrow$ A y B^C independientes

debemos probar:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \Rightarrow \mathbb{P}(A \cap B^C) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B^C)$$

Sabemos que

$$(1) \quad \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A \cap B^C) + \mathbb{P}(B \cap A^C) + \mathbb{P}(A \cap B)$$

luego

$$\mathbb{P}(A \cap B^C) = \mathbb{P}(A \cup B) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(B \cap A^C)$$

pero

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

con esto queda

$$(2) \quad \mathbb{P}(A \cap B^C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 2 \cdot \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(B \cap A^C)$$

por otra parte, se tiene

$$\mathbb{P}(B \cap A^C) = \mathbb{P}((B^C \cup A)^C) = 1 - \mathbb{P}(B^C \cup A)$$

pero

$$\mathbb{P}(B^C \cup A) = \mathbb{P}(B^C) + \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B^C \cap A)$$

quedando

$$(3) \quad \mathbb{P}(B \cap A^C) = 1 - [\mathbb{P}(B^C) + \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B^C \cap A)]$$

juntando (2) con (3) se tiene

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cap B^C) &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 2 \cdot \mathbb{P}(A \cap B) - 1 + \mathbb{P}(B^C) + \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B^C \cap A) \\ &= 2\mathbb{P}(A) + -2\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap B^C) \end{aligned}$$

que en definitiva es:

$$2\mathbb{P}(A \cap B^C) = 2\mathbb{P}(A) + -2\mathbb{P}(A \cap B) = 2(\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B))$$

con lo que queda

$$\mathbb{P}(A \cap B^C) = \mathbb{P}(A)\,[1 - \mathbb{P}(B)] = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B^C)$$