

4.- En un juego de video se generan rectángulos (celdas) con dimensiones X e Y variables aleatorias independientes. Suponga que X e Y tiene distribución uniforme en $[0, 1]$. Si A y P son el área y el perímetro del rectángulo:
 b) Determine usando el teorema de cambio de variable la función de densidad de A .

SOLUCIÓN

Para resolver este probable utilizaremos el siguiente resultado, que es una aplicación simple del teorema de cambio de variables

Sea (X, Y) una v.a. bidimensional continua y supongamos que X e Y son independientes. Por lo tanto, se tiene

$$f_{XY}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

Sea $W = XY$ y $U = X$, entonces se tiene:

$$f_{WU}(w, u) = f_X(u) \cdot f_Y\left(\frac{w}{u}\right) \cdot \left|\frac{1}{u}\right|$$

Para efectos del problema, se tiene:

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y \in [0, 1] \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

luego

$$f_X(u) \cdot f_Y\left(\frac{w}{u}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } u \in [0, 1], \frac{w}{u} \in [0, 1] \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

pero notemos que

$$u \in [0, 1] \wedge \frac{w}{u} \in [0, 1] \iff 0 < u < 1 \wedge 0 < w < u$$

luego

$$f_X(u) \cdot f_Y\left(\frac{w}{u}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < w < u < 1 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

así se tiene

$$f_{WU}(w, u) = \begin{cases} \left|\frac{1}{u}\right| & \text{si } 0 < w < u < 1 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

ahora bien, se quiere calcular la función de densidad de $W = XY$, así se tiene:

$$f_W(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{WU}(w, u) du$$

entonces

$$f_W(w) = \int_w^1 \left|\frac{1}{u}\right| du = \ln(1) - \ln(w) = -\ln(w) \quad w \in (0, 1)$$

Queda propuesto mostrar que efectivamente este resultado es una densidad de probabilidad.