

# AUXILIAR 10: PROBABILIDADES Y ESTADÍSTICA

PROFESOR: FERNANDO LEMA

AUXILIARES: ABELINO JIMÉNEZ - BENJAMÍN PALACIOS

23 DE OCTUBRE DE 2009

- P1.** Sea  $X_1, \dots, X_n$  una muestra aleatoria de una v.a.  $X$ , con esperanza  $\mu$  y varianza  $\sigma^2$ . Considere el estimador

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2.$$

- (a) Muestre que  $\mathbb{E}(S^2) = \sigma^2$ .
- (b) Pruebe para el caso  $n = 2$  que si  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ , entonces  $\frac{n-1}{\sigma^2} S^2 \sim \chi_{n-1}^2$ .
- (c) Un fabricante de detergente líquido está interesado en la efectividad de su proceso para llenar envases de detergente donde la cantidad de detergente esta medida por una variable aleatoria normal. La norma dice que no se debe tener una desviación estándar  $\sigma$  en el proceso mayor que 0.15, ya que de lo contrario habrá envases más vacíos de lo permitido. Se toma una muestra aleatoria de 20 envases y se obtiene una varianza muestral  $S^2 = 0,0153$  gramos. ¿Es esta medición una evidencia de que se está cumpliendo la norma con una confianza del 95%?. Suponga ahora que se conoce la varianza,  $\sigma^2 = 0,12$ . De un intervalo de confianza para la media.
- P2.** Sea  $T$ , una v.a. que mide el tiempo en que falla una ampolla, que posee una distribución exponencial (i.e.  $f_T(t) = \alpha e^{-\alpha t}, t \geq 0$ ) y  $T_1, \dots, T_n$  una muestra aleatoria de  $T$  ( $T_i$  es tiempo de funcionamiento de la ampolla  $i$ ). Considere  $Z = \min(T_1, \dots, T_n)$  y proponga un estimador insesgado del tiempo de funcionamiento esperado. Compárelo con otro estimador conocido y considerando el caso en que mantener encendida una ampolla implica un cierto costo, diga que estimador escogería.
- P3.** Considere  $X_1, \dots, X_n$  una muestra aleatoria de la v.a.  $X \sim \text{Gamma}(r, \alpha)$ . Si  $r$  es conocido, determine el estimador de máxima verosimilitud de  $\alpha$ .
- P4.** Se sabe que en una fábrica de guitarras una proporción fija  $p$  de estas sale buena y  $1 - p$  defectuosa. Si  $X$  es una v.a. que indica si la guitarra está defectuosa ( $X = 0$ ) o no ( $X = 1$ ), considerando la muestra aleatoria  $X_1, \dots, X_n$  de  $X$ , determine un E.M.V para  $p$ .