Universidad de Chile
Departamento de Ingeniería Matemática

Problemas de Optimización para Estudiantes de Ingeniería

Capítulo 1: Matemáticas para la Optimización
Capítulo 2: Condiciones de Optimalidad
Capítulo 3: Programación Lineal
Capítulo 4: Dualidad en Programación Lineal
Capítulo 5: Modelos y Algoritmos de flujos en redes

Autores:

Jorge AMAYA A.

Cristopher HERMOSILLA J.

Nicolás HERNÁNDEZ S.

14 de junio de 2009

Índice general

Capítulo 1

Matemáticas para la Optimización

1.1. Conjuntos Convexos

1.1.1. Problemas Resueltos

P1. Considere la norma euclideana en las siguientes definiciones:

- Dados $v \in \mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$ y $\varepsilon > 0$, se llama **Cono de Bishop-Phelps** al conjunto $K(v, \varepsilon)$ definido por:

$$K(v,\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^3 : \quad \varepsilon \|v\| \|x\| \leq \langle v, x \rangle \} \tag{1.1.1}$$

- Dados $a, b \in \mathbb{R}^2$ y $\gamma \in [0,1]$, se llama **Pétalo de Penot** al conjunto $P_\gamma(a,b)$ definido por:

$$P_\gamma(a,b) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \quad \gamma \|a - x\| + \|x - b\| \leq \|b - a\| \} \tag{1.1.2}$$

- Dados $C \subseteq \mathbb{R}^2$ y $x_0 \in \mathbb{R}^2$, se llama **Gota de Danes** al conjunto $[C, x_0]$ definido por:

$$[C, x_0] = Co(\{x_0\} \cup C) \tag{1.1.3}$$

a) Pruebe que $K(v, \varepsilon)$ es convexo para cualquier $v \in \mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$ y $\varepsilon > 0$

b) Pruebe que $P_\gamma(a,b)$ es convexo para cualquier $a, b \in \mathbb{R}^2$ y $\gamma \in [0,1]$

c) Pruebe que $[C, x_0] = \{x_0 + t(c - x_0) : \ t \in [0,1], c \in C\}$ $\forall C \subseteq \mathbb{R}^2$convexo y $x_0 \in \mathbb{R}^2$

d) Pruebe que dados $a, b \in \mathbb{R}^2$ y $\gamma \in (0,1)$ entonces $B(b,r) \subseteq P_\gamma(a,b)$, donde $r = \|a - b\| \dfrac{1-\gamma}{1+\gamma}$. Concluya que $[c, B(b,r)] \subseteq P_\gamma(a,b)$ $\forall c \in P_\gamma(a,b)$

Solución:

a) Sean $v \in \mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$ y $\varepsilon > 0$ fijos, consideremos $x, y \in K(v, \varepsilon)$ y $t \in [0,1]$.
Sea $z = tx + (1-t)y$, veamos que $z \in K(v, \varepsilon)$:

$$\begin{aligned}
\varepsilon \|v\| \|z\| &= \varepsilon \|v\| \|tx + (1-t)y\| \\
&\leq t\varepsilon \|v\| \|x\| + (1-t)\varepsilon \|v\| \|y\| && \text{(propiedades de normas)} \\
&\leq t \langle v, x \rangle + (1-t) \langle v, x \rangle && (x, y \in K(v,\varepsilon)) \\
&= \langle v, x \rangle
\end{aligned}$$

Luego $z \in K(v, \varepsilon)$, y como x, y, t son arbitrario se concluye que $K(v, \varepsilon)$ es convexo.

b) Sean $a,b \in \mathbb{R}^2$ y $\gamma \in [0,1]$ fijos, consideremos $x,y \in P_\gamma(a,b)$ y $t \in [0,1]$.
Sea $z = tx + (1-t)y$, veamos que $z \in P_\gamma(a,b)$:

$$\begin{aligned}
\gamma\|a-z\| + \|z-b\| &= \gamma\|a - tx - (1-t)y\| + \|tx + (1-t)y - b\| \\
&= \gamma\|ta + (1-t)a - tx - (1-t)y\| + \|tx + (1-t)y - tb - (1-t)b\| \\
&= \gamma\|t(a-x) + (1-t)(a-y)\| + \|t(x-b) + (1-t)(y-b)\| \\
&\leq t\gamma\|a-x\| + (1-t)\gamma\|a-y\| + t\|x-b\| + (1-t)\|y-b\| \\
&= t[\gamma\|a-x\| + \|x-b\|] + (1-t)[\gamma\|a-y\| + \|y-b\|] \\
&\leq t\|b-a\| + (1-t)\|b-a\| \\
&= \|b-a\|
\end{aligned}$$

Luego $z \in P_\gamma(a,b)$, y como x,y,t son arbitrario se concluye que $P_\gamma(a,b)$ es convexo.

c) Esto es directo de la definición de $Co(\{x_0\} \cup C)$

d) Sean $a,b \in \mathbb{R}^2$, $\gamma \in (0,1)$ y r como en el enunciado. Sea $x \in B(b,r)$, luego:

$$\begin{aligned}
\|x-b\| &\leq \|a-b\|\frac{1-\gamma}{1+\gamma} \\
\Rightarrow \|a-b\| &\geq \|x-b\| + \gamma\|x-b\| + \gamma\|a-b\| \\
&\geq \|x-b\| + \gamma\|x-a\|
\end{aligned}$$

Luego $B(b,r) \subseteq P_\gamma(a,b)$. Más aún como $P_\gamma(a,b)$ es convexo y contiene a $B(b,r)$ se concluye que

$$[c, B(b,r)] \subseteq P_\gamma(a,b) \quad \forall c \in P_\gamma(a,b)$$

P2. Demuestre que la proyección en $\mathbb{R}^n$, de un punto $\vec{a}$, sobre la bola cerrada $B(\vec{c},1)$ (suponiendo que $\vec{a} \notin B(\vec{c},1)$), está dada por

$$\vec{p}(\vec{a}) = \vec{c} + \frac{\vec{a}-\vec{c}}{\|\vec{a}-\vec{c}\|}$$

Solución:

Como $B(\vec{c},1)$ es un convexo cerrado no vacío entonces la proyección de $\vec{a}$ sobre la bola es única, bastará entonces ver que $\vec{p}(\vec{a}) = \vec{c} + \frac{\vec{a}-\vec{c}}{\|\vec{a}-\vec{c}\|}$ minimiza la distancia de $\vec{a}$ a la bola.

$$\begin{aligned}
d(\vec{p}(\vec{a}),\vec{a}) &= \|\vec{p}(\vec{a}) - \vec{a}\| \\
&= \|\vec{c} + \frac{\vec{a}-\vec{c}}{\|\vec{a}-\vec{c}\|} - \vec{a}\| \\
&= \|(\vec{c}-\vec{a})\left(1 - \frac{1}{\|\vec{a}-\vec{c}\|}\right)\| \\
&= \|\vec{c}-\vec{a}\|\left(1 - \frac{1}{\|\vec{a}-\vec{c}\|}\right) \\
&= \|\vec{a}-\vec{c}\| - 1
\end{aligned}$$

por otro lado claramente $\vec{p}(\vec{a}) \in B(\vec{c},1)$, pues $d(\vec{p}(\vec{a}),\vec{c}) = 1$.

Sea ahora $\vec{x} \in B(\vec{c},1)$,

$$\begin{aligned} d(\vec{a},\vec{x}) &= \|\vec{a}-\vec{x}\| \\ &= \|(\vec{a}-\vec{c})-(\vec{x}-\vec{c})\| \\ &\geq \|\vec{a}-\vec{c}\| - \|\vec{x}-\vec{c}\| \\ &\geq \|\vec{a}-\vec{c}\| - 1 \\ &= d(\vec{p}(\vec{a}),\vec{a}) \end{aligned}$$

Con lo cual concluimos que $\vec{p}(\vec{a})$ es la proyección de $\vec{a}$ sobre $B(\vec{c},1)$.

P3. Sea $A,B \in S_n(\mathbb{R})$ (Matrices simétricas de $n \times n$). Supongamos que B no es definida negativa. Pruebe la equivalencia de las siguientes afirmaciones:

a) $\langle Bx,x\rangle \geq 0$ y $x \neq 0 \Rightarrow \langle Ax,x\rangle > 0$

b) $\exists u \geq 0$ tq $A-uB$ es definida positiva

Indicación: Considere el conjunto $C = \{(\langle Ax,x\rangle, \langle Bx,x\rangle), \|x\|=1\}$, asuma que es convexo.

Solución:
$(a) \Rightarrow (b)$
Consideremos el conjunto convexo $C = \{(\langle Ax,x\rangle, \langle Bx,x\rangle) \in \mathbb{R}^2 : \|x\|=1\}$. Observemos que C no intersecta $\mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^+$ puesto que se cumpliría que $\langle Ax,x\rangle \leq 0$ y $\langle Bx,x\rangle \geq 0$ con $\|x\|=1$, lo cual contradice (a). Luego por Hahn-Banach podemos separa C de $\mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^+$, más aún, como ambos conjuntos son cerrados, la separación es estricta, luego $\exists r \in \mathbb{R}$ y $s=(s_1,s_2) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ tal que:

$$s^T x > r \ \ \forall x \in C \quad \wedge s^T y < r \ \ \forall y \in \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^+$$

tomando $y=0$ se tiene que $r>0$. Además si $y \in \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^+$ se tiene que $ty \in \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^+ \ \forall t>0$. Luego necesariamente se debe tener que $s_1 \geq 0$ y $s_2 \leq 0$ pues de otra forma, si $y \in \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^+$, $s^T y = s_1 y_1 + s_2 y_2$ podría crecer hasta $+\infty$ contradiciendo el acotamiento por r.
Notemos además que $s \neq 0$ pues de no ser así, necesariamente $s_2 < 0$ ya que $s \neq 0$ con lo cual se tendría que $\forall (x_1,x_2) \in C$ $s^T x = s_1 x_1 + s_2 x_2 > r$ lo que implicaría que $\forall \|x\|=1$

$$\langle Bx,x\rangle < \frac{r}{s_2} < 0$$

lo que no puede ser pues B no es definida negativa. Por tanto,

$$x_1 + \frac{s_2}{s_1} x_2 > \frac{r}{s_1} \ \forall (x_1,x_2) \in C \Leftrightarrow \langle Ax,x\rangle + \frac{s_2}{s_1}\langle Bx,x\rangle > \frac{r}{s_1} > 0 \ \forall \|x\|=1$$

Luego tomando $u = -\frac{s_2}{s_1}$ se concluye.
$(b) \Rightarrow (a)$
Notemos que como $A,B \in S_n(\mathbb{R})$, entonces $A=A^T$ y $B=B^T$ y como $\exists u \geq 0$ tal que $A-uB$ es definida positiva, se tiene que $\forall x \neq 0$:

$$\begin{aligned} 0 < x^T(A-uB)x &= x^T Ax - ux^T Bx && (1.1.4) \\ &= \langle A^T x,x\rangle - u\langle B^T x,x\rangle && (1.1.5) \\ &= \langle Ax,x\rangle - u\langle Bx,x\rangle && (1.1.6) \end{aligned}$$

Entonces $\quad u\langle Bx,x\rangle < \langle Ax,x\rangle$ y como $u \geq 0$, se tiene claramente (a).

P4. Sea $A \in M_{m \times n}$, $c \in \mathbb{R}^n$. Muestre que exactamente uno de los siguientes sistemas tiene una solución:

$$Ax = c \tag{1.1.7}$$

$$A^T y = 0 \qquad c^T y = 1 \tag{1.1.8}$$

Solución:

Primero demostremos que si (1.1.7) tiene solución, entonces (1.1.8) no tiene solución. Sea x^* la solución de (1.1.7) y supongamos y^* solución de (1.1.8). Se cumple entonces:

$$\begin{aligned} Ax^* &= c \quad (1) \\ A^T y^* &= 0 \quad (2) \\ c^T y^* &= 1 \quad (3) \end{aligned}$$

Multiplicando por y^* en (1) se obtiene:

$$(x^*)^T A^T y^* = c^T y^*$$

Esto no es posible ya que por (2) se tiene que el lado izquierdo es 0 mientras que por (3) se tiene que el lado derecho es 1.

Ahora demostraremos que si (1.1.7) no tiene solución entonces (1.1.8) tiene solución.
Sea $S = \{w = Ax \mid x \in \mathbb{R}^n\}$ que es un convexo, cerrado y no vacío. Además como (1.1.7) no tiene solución, $c \notin S$. Luego, existe un hiperplano separador, es decir, existe $p \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}$ tales que:

$$\begin{aligned} p^T c &> \alpha \\ p^T w &\leq \alpha \quad \forall w \in S \end{aligned}$$

Equivalentemente:

$$\begin{aligned} p^T c &> \alpha \\ p^T Ax &\leq \alpha \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

Tomando $x = 0$ se concluye que $\alpha \geq 0$. Afirmamos que $A^T p = 0$. En efecto, suponiendo que $(A^T p)_i \neq 0$ y tomando $x = \left(\frac{2\alpha}{(A^T p)_i}\right) e_i$ se tiene:

$$p^T Ax = (A^T p)^T x = 2\alpha > \alpha$$

Que contradice la condición de separador, luego necesariamente $A^T p = 0$, tomando

$$y = (\frac{1}{c^T p})p$$

se concluye que (1.1.8) tiene solución.

P5. Considere el siguiente problema, en donde A es una matriz de $m \times n$:

$$\begin{array}{lll} (P) & \text{mín} & c^T x \\ & s.a: & Ax = b \\ & & x \geq 0 \end{array}$$

y sea x^* una solución óptima.

a) Suponga que $x_1^*,\dots,x_p^* > 0$ y $x_j^* = 0$ para $j = p+1,\dots,n$. Demuestre que el sistema:

$$\begin{array}{lrcl} (S) & Ad & = & 0 \\ & c^T d & < & 0 \\ & d_{p+1},\dots,d_n & \geq & 0 \end{array}$$

no tiene solución.

b) Demuestre, usando el teorema de Farkas, que existe un vector z tal que:

$$A^T z \leq c$$

Solución:

a) Supongamos que (S) tiene solución d. Sea $x(t) = x^* + td$

$$Ax(t) = Ax^* + tAd \Rightarrow Ax(t) = Ax^* = b$$

Además $x(t) = (x_1^* + td_1,\dots,x_p^* + td_p, td_{p+1},\dots,td_n) \geq 0$ para t suficientemente pequeño. Luego $x(t)$ es P-factible con $t \in [0,\bar{t})$ donde $\bar{t} = \text{mín}\{\frac{x_i}{p_i} : p_i < 0\}$.
Sea $t \in (0,\bar{t})$ cualquiera. Luego

$$c^T x(t) = c^T x^* + tc^T d < c^T x^*$$

Lo que implica que x^* no es solución de P. Lo que es una contradicción. Luego (S) no tiene solución.

b) Notemos que (S) puede escribirse como:

$$\begin{aligned} Ad &\leq 0 \\ -Ad &\leq 0 \\ Td &\leq 0 \end{aligned}$$

Donde $T = -(e_{p+1}^T,\dots,e_n^T)$ (cada e_i es un vector canónico de $\mathbb{R}^n$). Luego por Farkas

$$\begin{array}{lrr} [A^T, -A^T, T^T] & y = & -c \\ & y \geq & 0 \end{array}$$

Sea $y = (u,v,w)$ luego

$$\begin{aligned} A^T u - A^T v + T^T w &= -c \\ u,v,w &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^T (v-u) - T^T w &= c \\ u,v,w &\geq 0 \end{aligned}$$

$$A^T (v-u) \leq c$$

pues $-T^T w \geq 0$. Finalmente tomando $z = v - u$ se concluye.

P6. Considere el poliedro $P = \{y \in \mathbb{R}^m : A^T y \leq c\}$ con $c \in \mathbb{R}^n$. Además considere el siguiente P.L.

$$
\begin{aligned}
(PL) \quad \text{mín} \quad & c^T x \\
& Ax = 0 \\
& x \geq 0
\end{aligned}
$$

Pruebe que P es no vacío ssi el mínimo de (PL) es cero.

Solución:
Supongamos que P es no vacío, es decir, $\exists y \in \mathbb{R}^m$ tal que $A^T y \leq c$, agregando una variable de holgura $z \geq 0$ y escribiendo $y = u - v$ con $u, v \geq 0$ se tiene:

$$A^T u - A^T v + z = c$$

Definamos $A_0 = (A^T \quad -A^T \quad I)$ y $\xi = (u, v, z)$, luego

$$A_0 \xi = c \ \text{ con } \xi \geq 0$$

Por Farkas $\nexists w \in \mathbb{R}^n$ tal que $A_0^T w \leq 0$, $c^T w > 0$.
Lo anterior implica que $Aw = 0$, $w \leq 0$ y $c^T w > 0$, pero esto último es equivalente a que $\nexists x \geq 0$ tal que $Ax = 0$ y $c^T x < 0$, pues basta tomar $w = -x$.
Finalmente con esto se puede concluir que si (PL) tiene solución, entonces $c^T w \geq 0$ y como $w = 0$ es factible, se concluye que el mínimo de (PL) es cero.
Para probar la otra implicancia basta ver que si suponemos que el mínimo de (PL) es cero entonces no puede exitir $x \geq 0$ tal que $Ax = 0$ y $c^T x < 0$, pues ésto contradice el hecho que el mínimo es cero. Luego procediendo con Farkas al igual que la implicancia anterior se concluye.

1.1.2. Problemas Propuestos

P1. Sean

$$Z(b) = \text{máx}\{c^T x / Ax \leq b, \quad x \geq 0\}$$

$$V(c) = \text{máx}\{c^T x / Ax \leq b, \quad x \geq 0\}$$

Demuestre que Z es cóncava y V es convexa, asumiendo que b y c están en dominios convexos en los que estos dos problemas son factibles y acotados.

P2. Definamos la envoltura convexa de un conjunto de puntos $\{x_1, \ldots, x_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$ por

$$co(\{x_1, \ldots, x_m\}) := \{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i / \lambda_i \in [0,1] \ \forall i = 1, \ldots, m \wedge \sum_{i=0}^{m} \lambda_i = 1\}$$

a) Demuestre explícitamente que $co(\{x_1, \ldots, x_m\})$ es un conjunto convexo.

b) Demuestre que todo punto extremo de $co(\{x_1, \ldots, x_m\})$ es necesariamente uno de los puntos x_i.

c) Sean $A = \{a_1, \ldots, a_{m_1}\}$ y $B = \{b_1, \ldots, b_{m_2}\}$. Demostrar que

$$co(A \times B) = co(A) \times co(B)$$

d) Calcule los puntos extremos del hipercubo en $\mathbb{R}^n$

$$[0,1]^n := \{z \in \mathbb{R}^n / z_i \in [0,1] \ \forall i = 1, \ldots, n\}$$

P3. *a*) Demuestre que un poliedro es acotado si y sólo si no tiene direcciones extremas.

b) Sea $P = \{x \in \mathbb{R}^n : \ Ax = b, \ x \geq 0\}$ un poliedro convexo compacto (cerrado y acotado) en $\mathbb{R}^n$, con $A \in M(\mathbb{R})_{m\times n}$ de rango $m(m < n)$. Demuestre que las siguientes son equivalentes:

1) Cada elemento de P tiene al menos m componentes mayores que cero.

2) Cada punto extremo de P tiene exactamente m componentes mayores que cero.

Indicación: Use la caracterización de un poliedro en función de sus puntos extremos y sus direcciones extremas.

P4. **(Descripción de un semi-espacio de Voronoi)**.
Sean a y b puntos distintos de $\mathbb{R}^n$. Muestre que el conjunto de todos los puntos que están más cerca de a que de b en norma euclideana, i.e., $\{x : \|x-a\|_2 \leq \|x-b\|_2\}$, es un semi-espacio. Descríbalo explicitamente como una desigualdad de la forma $c^T x \leq d$. Dibújelo.

P5. Sean A matriz $p \times n$ y B matriz $q \times n$. Demuestre que uno y sólo uno de los siguientes tienen solución

a) $Ax < 0 \quad Bx = 0$

b) $A^T u + B^T v = 0 \quad u \neq 0, u \geq 0$

P6. Considere la pareja primal-dual:

$$(P) \quad \begin{array}{c} \min c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{array} \qquad\qquad (D) \quad \begin{array}{c} \max b^T y \\ A^T y \leq c \\ \end{array}$$

Probar con Farkas que si (D) es no acotado entonces (P) es infactible.

P7. Determine todos los puntos y direcciones extremas del poliedro

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 10 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 - x_5 &= 10 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

1.2. Funciones Convexas

1.2.1. Problemas Resueltos

P1. *a*) Considere el siguiente problema

$$\begin{array}{lll} (P) & \text{mín} & f(x) \\ & & g_i(x) \leq 0 \\ & & i = 1, \ldots, n \end{array}$$

Donde todas las g_i son funciones convexas.
Demuestre que la región factible $S = \{x \in \mathbb{R}^n : \ g_i(x) \leq 0 \ , i = 1, \ldots, n\}$ es convexa.

b) Considere f una función convexa y S un conjunto convexo. Entonces

$$X^* = \{x^* : \ f(x^*) \leq f(x) \ \forall x \in S\}$$

es convexo.

Solución:

a) Sean $x_1, x_2 \in S$ y $\lambda \in [0,1]$. Definamos $z = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$, veamos que $z \in S$.
Sea $i \in \{1, \ldots, n\}$ entonces:

$$g_i(z) \leq \lambda g_i(x_1) + (1-\lambda) g_i(x_2) \qquad \text{(Convexidad de } g_i)$$

y como $x_1, x_2 \in S$ se tiene que $g_i(x_1) \leq 0$ y $g_i(x_2) \leq 0$, con lo que $g_i(z) \leq 0$.
Dado que i es arbitrario, se concluye.

b) Sean $x_1, x_2 \in X^*$ y $\lambda \in [0,1]$. Definamos $z = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$

$$\begin{aligned} f(z) &\leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) && \text{(Convexidad de } f) \\ &\leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(x) && (\forall x \in S) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Finalmente $f(z) \leq f(x) \ \forall x \in S$, con lo cual $z \in X^*$

P2. *a*) Sea S un conjunto convexo no vacío de $\mathbb{R}^n$. Pruebe que:

1) $f(y) = \text{ínf}\{\|x-y\| / x \in S\}$
2) $g(y) = \sup\{y^T x / x \in S\}$

son convexas.

b) Sea $f(x) = \text{máx}\{f_1(x), \ldots, f_k(x)\}$ y $f_1, \ldots, f_k : S \longrightarrow \mathbb{R}$ $(S \subseteq \mathbb{R}^n)$, funciones convexas.
Demostrar que f es convexa.

Solución:

a) 1) Sean $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in [0,1]$. Definamos $z = \lambda y_1 + (1-\lambda) y_2$
Dado $x \in S$ cualquiera, éste se puede expresar como $x = \lambda x + (1-\lambda)x$, entonces:

$$\begin{aligned} f(z) &\leq \|z - x\| \\ &= \|\lambda(y_1 - x) + (1-\lambda)(y_2 - x)\| \\ &\leq \lambda \|y_1 - x\| + (1-\lambda)\|y_2 - x\| \end{aligned}$$

Luego tomando ínf sobre S se tiene:

$$\begin{aligned}
f(z) &\leq \inf\{\lambda\|y_1-x\|+(1-\lambda)\|y_2-x\|:\ x\in S\}\\
&\leq \lambda \inf\{\|y_1-x\|:\ x\in S\}+(1-\lambda)\inf\{\|y_2-x\|:\ x\in S\}\\
&= \lambda f(y_1)+(1-\lambda)f(y_2)
\end{aligned}$$

De donde se concluye.

2) Sean $y_1,y_2\in\mathbb{R}^n$ y $\lambda\in[0,1]$. Definamos $z=\lambda y_1+(1-\lambda)y_2$, entonces se tiene:

$$\begin{aligned}
g(z) &= \sup\{[\lambda y_1+(1-\lambda)y_2]^T x:\ x\in S\}\\
&= \sup\{\lambda y_1^T x+(1-\lambda)y_2^T x:\ x\in S\}\\
&\leq \lambda \sup\{y_1^T x:\ x\in S\}+(1-\lambda)\sup\{y_2^T x:\ x\in S\}\\
&= \lambda g(y_1)+(1-\lambda)g(y_2)
\end{aligned}$$

De donde se concluye.

b) Sean $x_1,x_2\in S$ y $\lambda\in[0,1]$. Definamos $z=\lambda x_1+(1-\lambda)x_2$.
Sea $i\in\{1,...,n\}$ cualquiera, entonces:

$$\begin{aligned}
f_i(z) &\leq \lambda f_i(x_1)+(1-\lambda)f_i(x_2) && (\text{ Convexidad de } f_i)\\
&\leq \lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2) && (\text{ pues } f_i(x)\leq f(x)\ \forall x\in S)
\end{aligned}$$

Luego tomando máximo sobre i en el lado izquierdo se concluye.

P3. Sea $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ una función continua que satisface la desigualdad siguiente:

$$f(x)\leq \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(y)dy,\quad x\in\mathbb{R},\quad h>0.$$

Pruebe:

a) El maximo de f en un intervalo cerrado $[a,b]$ es alcanzado en a o en b.

b) f es convexa.
Indicación: Considere $L(x)=\dfrac{(x-a)f(b)-(x-b)f(a)}{b-a}$ y $G(x)=f(x)-L(x)$

Solución:

a) Supongamos que el máximo no se alcanza en los extremos, luego por el teorema de Weiestrass $\exists c\in(a,b)$ que maximiza a f. Además, dado que $f(a),f(b)<f(c)$ se tiene por continuidad de f, que $\exists a_0,b_0\in[a,b]$ tal que $f(x)<f(c)$ si $x\in[a,a_0]$ o $x\in[b_0,b]$. Sea $h>0$ tal que $c-h\in[a,a_0)$ o $c+h\in(b_0,b]$ y que además $[c-h,c+h]\subseteq[a,b]$. Sin perdida de generalidad supongamos $c-h\in[a,a_0)$, luego aplicando la desigualdad del enunciado se tiene:

$$\begin{aligned}
f(c) &\leq \frac{1}{2h}\int_{c-h}^{c+h} f(y)dy\\
&\leq \frac{1}{2h}\left[\int_{c-h}^{a_0} f(y)dy+\int_{a_0}^{c+h} f(y)dy\right] && (f(y)<f(c)\ \forall y\in[c-h,a_0])\\
&< \frac{1}{2h}\left[(a_0-c+h)f(c)+(c+h-a_0)f(c)\right]\\
&= f(c)
\end{aligned}$$

Lo cual no puede ser, luego se tiene lo pedido.

b) Consideremos $L(x)$ como en el enunciado. Como es lineal, entonces es convexa y más aún, verifica la desigualdad del enunciado (de hecho es una igualdad). Ahora consideremos $G(x) = f(x) - L(x)$, luego por linealidad de la integral y, dado que f y L verifican la desigualdad entonces G también la verifica. Luego aplicando la parte (*a*) se tiene que G alcanza un máximo en a o en b. Pero $G(a) = G(b) = 0$ Luego se tiene que

$$G(x) \leq 0 \Rightarrow f(x) \leq L(x) \quad \forall x \in [a,b]$$

Finalmente para cualquier $t \in [0,1]$, tomando $(1-t)a + tb \in [a,b]$, substituyendo esto en la reciente desigualdad se obtiene que f es convexa.

P4. *a*) Pruebe que cualquier norma en $\mathbb{R}^n$ es convexa.

b) Demostrar que el conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{|x|} + \sqrt{|y|} < 1\}$ no es convexo. (hacer un dibujo de este conjunto). Deducir de ello que:

$$\|(x,y)\| = (\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|})^2$$

No es una norma en $\mathbb{R}^2$. Qué condición falla?

Solución:

a) Sea $\|\cdot\|$ una norma en $\mathbb{R}^n$. Sean $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in [0,1]$ entonces:

$$\begin{aligned} \|\lambda x + (1-\lambda)y\| &\leq \|\lambda\vec{x}\| + \|(1-\lambda)\vec{y}\| && \text{(desigualdad triangular)} \\ &= \lambda\|\vec{x}\| + (1-\lambda)\|\vec{y}\| && \text{(positividad homogénea)} \end{aligned}$$

Como $\vec{x}, \vec{y}$ y λ son arbitrarios, $\|\cdot\|$ es una función convexa.

b) Primero notemos que podemos escribir C como $C\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x,y)\| < 1\}$ con $\|\cdot\|$ la función definida en el enunciado. El dibujo del conjunto C está dado por la figura. Para ver que C no es

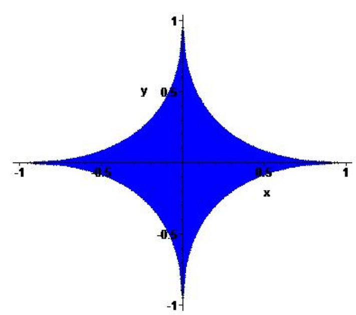


Figura 1.1: Dibujo de C

convexo, bastará dar un contraejemplo, un caso posible es tomando $\vec{x} = (\frac{9}{10}, 0)$ y $\vec{y} = (0, \frac{9}{10})$ y ver que $\frac{1}{2}\vec{x} + \frac{1}{2}\vec{y} \notin C$.
Ahora bien como C no es convexo $\exists \vec{x}, \vec{y} \in C$ $\exists \lambda \in (0,1)$ tal que $\lambda\vec{x} + (1-\lambda)\vec{y} \notin C$, es decir

$$\|\lambda\vec{x} + (1-\lambda)\vec{y}\| \geq 1$$

Supongamos que $\|\cdot\|$ es norma, entonces en particular debe cumplir la desigualdad triangular, entonces se debe tener que:

$$\|\lambda\vec{x}+(1-\lambda)\vec{y}\| \leq \|\lambda\vec{x}\|+\|(1-\lambda)\vec{y}\| = \lambda\|\vec{x}\|+(1-\lambda)\|\vec{y}\|$$

como $\vec{x},\vec{y}\in C$ $\|\vec{x}\|,\|\vec{y}\|<1$ eso implica que

$$\|\lambda\vec{x}+(1-\lambda)\vec{y}\| < \lambda+(1-\lambda)=1$$

lo que es una contradicción. Por lo tanto $\|\cdot\|$ no es una norma pues no cumple la desigualdad triangular.

P5. Sea $g:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función convexa . Se define $f(x)=e^{g(x)}$. Muestre que f es convexa.
Solución:
Sean $x,y\in\mathbb{R}^n$, $\lambda\in[0,1]$. Por definición se tiene:

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)=e^{g(\lambda x+(1-\lambda)y)}$$

Como g es convexa y la exponencial es una función creciente se tiene que:

$$\begin{gathered} g(\lambda x+(1-\lambda)y) \leq \lambda g(x)+(1-\lambda)g(y) \\ e^{g(\lambda x+(1-\lambda)y)} \leq e^{\lambda g(x)+(1-\lambda)g(y)} \end{gathered}$$

Notando que la exponencial es una función convexa se tiene:

$$e^{\lambda g(x)+(1-\lambda)g(y)} \leq \lambda e^{g(x)}+(1-\lambda)e^{g(y)} = \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

Juntando todo se tiene:

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y) \leq \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

Se concluye que f es convexa.

P6. Sea $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow (-\infty,+\infty]$ dada por:

$$f(x):=\begin{cases} 1-\sqrt{1-x^2} & \text{si } x\in[-1,1] \\ +\infty & \text{si } x\in(-\infty,-1)\cup(1,\infty) \end{cases}$$

Demuestre que:

$$\partial f(x)=\begin{cases} \left\{\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right\} & \text{si } x\in(-1,1) \\ \emptyset & \text{si } x\in(-\infty,-1]\cup[1,\infty) \end{cases}$$

Solución:
Demostremos primero que f es convexa, la desigualdad:

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y) \leq \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

Se cumple claramente si $x\notin[-1,1]$ o si $y\notin[-1,1]$. Además f es diferenciable en $(-1,1)$ y se cumple:

$$f'(x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f''(x) = \frac{1}{(\sqrt{1-x^2})^3}$$

Luego $f''(x) > 0 \quad \forall x \in (-1,1)$ y se tiene f convexa en (-1,1). Por lo tanto hasta ahora se tiene que:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$$

Sean $x = 1, y \in (-1,1)$, para todo n natural se cumple:

$$f(\lambda(1-\frac{1}{n}) + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(1-\frac{1}{n}) + (1-\lambda) f(y)$$

Notemos que $\lambda(1-\frac{1}{n}) + (1-\lambda)y \in (-1,1)$ y f es continua en $(-1,1)$. Luego:

$$\lim_{n\to+\infty} f(\lambda(1-\frac{1}{n}) + (1-\lambda)y) = f(\lambda + (1-\lambda)y)$$

Además como f es continua a la derecha en $x = 1$ se cumple:

$$\lim_{n\to+\infty} f(1-\frac{1}{n}) = f(1)$$

Tomando límite en la desigualdad mencionada se concluye:

$$f(\lambda 1 + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(1) + (1-\lambda) f(y)$$

El caso $x = -1$ es análogo a este, así como el caso $x = 1, y = -1$. Se concluye:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \;\; \lambda \in [0,1]$$

Es decir, f es convexa. Ahora, como f es convexa y diferenciable en (-1,1) se tiene que:

$$\partial f(x) = \{f'(x)\} = \left\{ \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right\} \;\; x \in (-1,1)$$

Ahora sea $x \in \mathbb{R} \setminus [-1,1]$ y supongamos que existe $\xi \in \mathbb{R}$ tal que:

$$f(y) \geq f(x) + \xi(y-x) \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

Tomando $y \in (-1,1)$ y notando que $f(x) = \infty$ se concluye que tal ξ no existe y:

$$\partial f(x) = \emptyset \quad x \in \mathbb{R} \setminus [-1,1]$$

Para $x = 1$, sea $\xi \in \mathbb{R}$ tal que:

$$1 - \sqrt{1-y^2} \geq 1 + \xi(y-1) \quad \forall y \in (-1,1)$$

Equivalentemente (notar $(y-1) < 0$):

$$\frac{-\sqrt{1-y^2}}{y-1} \leq \xi \quad \forall y \in (-1,1)$$

Acercándonos a 1 tanto como se quiera se concluye $\xi = \infty$ lo que es una contradicción. El caso $x = -1$ es análogo a este y se concluye $\xi = -\infty$ que también es una contradicción.
Finalmente:

$$\partial f(x) = \begin{cases} \left\{ \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right\} & \text{si } x \in (-1,1) \\ \emptyset & \text{si } x \in (-\infty,-1] \cup [1,\infty) \end{cases}$$

1.2.2. Problemas Propuestos

P1. *a*) Sea $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$, $S \subseteq \mathbb{R}^n$, siendo S convexo. Demostrar que

$$E = \{(x,\alpha) \in S \times \mathbb{R} : \ f(x) \leq \alpha\} \text{ es un conjunto convexo } \iff f \text{ es una función convexa}$$

b) Sea (P) : $\min f(x), c \in \Omega$, en que $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$, es convexa. Demostrar que si $x_1, \ldots, x_k \in \Omega$ son soluciones de (P) entonces cualquier punto de $co\{x_1, \ldots, x_k\}$ es solución de (P).

P2. Suponga que $C \subseteq \mathbb{R}^m$ es convexo y que las funciones $f_1, f_2, ..., f_n : C \longrightarrow \mathbb{R}$ son convexas, y defina una función $f : C \longrightarrow \mathbb{R}^n$ con componentes f_i. Suponga además que $f(C)$ es convexo y que la función $g : f(C) \longrightarrow \mathbb{R}$ es convexa e isotona, es decir, para todo $y \leq z$ en $f(C)$, se tiene que $g(y) \leq g(z)$. Pruebe que $g \circ f$ es convexa

P3. Muestre que una función continua $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es convexa ssi para cada línea segmentada, su valor promedio en el segmento es menor igual que el promedio de sus puntos extremos del segmento: para cada $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$\int_0^1 f(x + \lambda(y-x))d\lambda \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

P4. Sea $f : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función tal que $f(x) > 0 \ \forall x \in I$. Suponga que $e^{cx}f(x)$ es convexa en I para cada $c \in \mathbb{R}$. Muestre que $\log f(x)$ es convexa en I.

P5. Sea $f : \mathbb{R}^{n+m} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función convexa. Considere la función $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$F(x) = \inf_{u \in U} f(x,u)$$

Donde $U \subseteq \mathbb{R}^m$ es un conjunto convexo no vacío tal que $F(x) > -\infty \ \forall x \in \mathbb{R}^n$. Muestre que F es convexa.

Indicación: Muestre que no puede existir un $\alpha \in [0,1]$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ y $u_1, u_2 \in U$ tales que

$$F(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) > \alpha f(x_1,u_1) + (1-\alpha) f(x_2,u_2)$$

P6. Considere la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow (-\infty, +\infty]$ definida por:

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [-1,1] \\ |x|-1 & \text{si } x \in [-2,-1) \cup (1,2] \\ +\infty & \text{si } x \in (-\infty,-2) \cup (2,\infty) \end{cases}$$

Demuestre que:

$$\partial f(x) = \begin{cases} \{0\} & \text{si } x \in (-1,1) \\ [-1,0] & \text{si } x = -1 \\ [0,1] & \text{si } x = 1 \\ \{-1\} & \text{si } x \in (-2,-1) \\ \{1\} & \text{si } x \in (1,2) \\ (-\infty,-1] & \text{si } x = -2 \\ [1,+\infty) & \text{si } x = 2 \\ \emptyset & \text{si } x \in (-\infty,-2) \cup (2,\infty) \end{cases}$$

P7. Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$, un conjunto convexo y sean $f_1, \ldots, f_k : S \longrightarrow \mathbb{R}$, funciones convexas y diferenciables. Sean además $f(x) = \max\{f_1(x), \ldots, f_k(x)\}$ y $\bar{x} \in S$.

Si se define $I = \{i = 1, \ldots, k \ / \ f(\bar{x}) = f_i(\bar{x})\}$ entonces se cumple

$$\partial f(\bar{x}) = \{\sum_{i \in I} \lambda_i \nabla f_i(\bar{x}) \ / \ \lambda_i \geq 0, i \in I, \sum_{i \in I} \lambda_i = 1\}$$

Capítulo 2

Caracterización de Optimalidad

2.1. Optimización con Restricciones

2.1.1. Problemas Resueltos

P1. Sea

$$\begin{array}{lll} (P) & \text{mín} & -3x+y-z^2 \\ & s.a. & x+y+z \quad \leq 0 \\ & & -x+2y+z^2 \quad = 0 \end{array}$$

a) Escriba las ecuaciones de KKT para (P).

b) Encuentre la(s) solución(ones) óptima(s) de (P) usando (a).

Solución:

a) Imponiendo las condiciones se obtiene

$$-3+u-\lambda = 0 \tag{2.1.1}$$

$$1+u+2\lambda = 0 \tag{2.1.2}$$

$$-2z+u+2\lambda z = 0 \tag{2.1.3}$$

$$u(x+y+z) = 0 \tag{2.1.4}$$

$$-x+2y+z^2 = 0 \tag{2.1.5}$$

$$u \geq 0 \tag{2.1.6}$$

$$\lambda \in \mathbb{R} \tag{2.1.7}$$

b) De (2.1.1) y (2.1.2) se tiene que $u = \frac{5}{3}$ y $\lambda = -\frac{4}{3}$. Luego de (2.1.4) necesariamente $x+y+z = 0$. De (2.1.3) se tiene que $z = \frac{5}{14}$ y de (2.1.5) se concluye que $x = \frac{-115}{588}$ e $y = \frac{-95}{588}$.

P2. Considere

$$\begin{array}{lll} (P) & \text{mín} & f(x) \\ & \text{s.a.} & g_i(x) \leq 0, \quad i = 1,\dots,m \end{array}$$

Sea $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ un mínimo local de (P). Sea $I = \{\ i\ /\ g_i(\bar{x}) = 0\}$. Suponga que $f, g_i \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)\ \forall i = 1,...,m$. Pruebe que $F_0 \cap G = \emptyset$, donde

$$F_0 = \{d :\ \nabla f(\bar{x})^T d < 0\}$$
$$G = \{d :\ \nabla g_i(\bar{x})^T d \leq 0, \quad i \in I\}$$

Solución:

Por contradicción, supongamos que $\exists d \in F_0 \cap G$. Luego como $\bar{x}$ es un mínimo local, satisface las condiciones de KKT, esto es, $\exists u_1,...,u_m \geq 0$ tales que

$$\nabla f(\bar{x}) + \sum_{i\in I} u_i \nabla g_i(\bar{x}) = 0$$

multiplicando la ecuación anterior por d^T se tiene

$$\nabla f(\bar{x})^T d + \sum_{i\in I} u_i \nabla g_i(\bar{x})^T d = 0 \Longrightarrow \nabla f(\bar{x})^T d = -\sum_{i\in I} u_i \nabla g_i(\bar{x})^T d.$$

Esto no puede ser, pues el lado izquierdo de la ecuación es < 0, sin embargo, el lado derecho ≥ 0 pues es el opuesto a una combinación lineal positiva de números negativos. Finalmente $F_0 \cap G = \emptyset$.

P3. *a*) Sea $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ y $b \in \mathbb{R}^m$. Considere el siguiente problema

$$\begin{array}{lll} (P) & \text{mín} & \frac{1}{2}\|x - x_0\|^2 \\ & \text{s.a.} & Ax \leq b \end{array}$$

Muestre que los multiplicadores de KKT deben satisfacer:

$$\begin{aligned} u^T A A^T u &= u^T (Ax_0 - b) \\ u &\geq 0 \\ u &\in \mathbb{R}^m \end{aligned}$$

b) Resuelva

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) \\ \text{s.a.} & x + y + z \leq -3 \end{array}$$

Solución:

a) Sea $x' = x - x_0$ y $b' = b - Ax_0$, entonces (P) se transforma en

$$\begin{array}{lll} (P') & \text{mín} & \frac{1}{2}\|x'\|^2 \\ & \text{s.a.} & e_i^T (Ax' - b') \leq 0, \ \forall i = 1,...,m \end{array}$$

Donde los e_i es el i-ésimo vector canónico de $\mathbb{R}^m$. Si x' es solución de (P') entonces debe cumplir las condiciones de KKT y como

$$\begin{aligned} \nabla f(x') &= x' \\ \nabla g_i(x') &= A^T e_i \quad \forall i = 1,...,m \end{aligned}$$

Se tiene que $\exists u_1,...,u_m \geq 0$ tales que

$$\begin{aligned} x' + \sum_{i=1}^{m} u_i A^T e_i &= 0 \\ u_i(e_i^T Ax' - b_i') &= 0 \qquad i = 1,\ldots,m \end{aligned}$$

Definiendo $u = (u_1,...,u_m) \in \mathbb{R}^m_+$ las ecuaciones anteriores quedan como (sumando sobre i en la segunda)

$$\begin{aligned} x' + A^T u &= 0 \\ u^T (Ax' - b') &= 0 \\ u &\geq 0 \end{aligned}$$

despejando x' de la primera ecuación y reemplazando en la segunda queda

$$u^T AA^T u = -u^T b' = u^T (Ax_0 - b)$$

que era lo pedido.

b) Consideremos $A = [1\ \ 1\ \ 1]$, $b = -3$ y $x_0 = (0,0,0)^T$. Luego, por parte (a), si el problema tiene solución el multiplicador de KKT asociado a ésta debe cumplir:

$$u^T AA^T u = -b \Longrightarrow 3u^2 = 3 \quad (\text{pues } AA^T = 3).$$

Luego $u = 1$ y por la parte anterior se tenía que $x' = -A^T u = -[1,1,1]$. Luego la solución del problema es $x = y = z = -1$.

P4. La función de Cobb-Douglas es muy utilizada en Economía para representar la relación entre los inputs y los outputs de una firma. Toma la forma $Y = AL^{\alpha}K^{\beta}$, donde Y representa los outputs, L el trabajo y K el capital. Esta formulación puede ser aplicada a la utilidad y toma la forma $u(x) = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$, donde los exponentes son positivos y suman 1. Considere el problema de maximización de la utilidad:

$$\begin{aligned} \text{máx}\, x^{\alpha} y^{1-\alpha} \\ p_1 x + p_2 y = w \\ x, y \geq 0 \end{aligned}$$

donde $p_1, p_2 > 0$ son los precios y $w > 0$ el presupuesto.

a) Escriba las condiciones de KKT y encuentre una solución de ellas, en función de p_1, p_2, w y α.

b) ¿Se puede decir que esta solución es óptima para el problema original? Justifique.

c) Encuentre el multiplicador λ, en función de p_1, p_2, w y α.

Solución:

a) Notemos primero que el problema se puede escribir como un problema de minimización

$$\begin{aligned} -\text{mín} -x^{\alpha} y^{1-\alpha} \\ p_1 x + p_2 y = w \\ x, y \geq 0 \end{aligned}$$

Además como la función es continua y el conjunto de restricciones es compacto (cerrado y acotado), la existencia de un máximo está asegurada. Imponiendo las condiciones de KKT al problema se obtiene

$$\begin{aligned} -\alpha x^{\alpha-1} y^{1-\alpha} + \lambda p_1 - u_1 \quad &= 0 \\ -(1-\alpha) x^{\alpha} y^{-\alpha} + \lambda p_2 \quad - u_2 &= 0 \end{aligned}$$

Si $u_1 \neq 0$ y $u_2 = 0$ entonces $x = 0$ e $y = \frac{w}{p_2}$ y la utilizadad es 0.
Si $u_2 \neq 0$ y $u_1 = 0$ entonces $y = 0$ e $x = \frac{w}{p_1}$ y la utilizadad es 0.
Si $u_1 \neq 0$ y $u_2 \neq 0$ entonces $x = 0$ e $y = 0$, lo cual no es factible pues se tendría $w = 0$. Veamos el caso más interesante, cuando $u_1 = 0$ y $u_2 = 0$. Las condiciones de KKT quedan

$$\begin{aligned} -\alpha x^{\alpha-1} y^{1-\alpha} + \lambda p_1 &= 0 \\ -(1-\alpha) x^{\alpha} y^{-\alpha} + \lambda p_2 &= 0 \end{aligned}$$

esto implica que

$$\frac{\alpha x^{\alpha-1}y^{1-\alpha}}{p_1}=\lambda=\frac{(1-\alpha)x^{\alpha}y^{-\alpha}}{p_2}\quad\Rightarrow y=\frac{(1-\alpha)p_1x}{\alpha p_2}$$

y como $p_1x+p_2y=w$, reemplazando y se obtiene

$$x=\frac{\alpha w}{p_1}\ \text{ e }\ y=\frac{(1-\alpha)w}{p_2}.$$

b) Esta solución es óptima pues entrega una utilidad positiva y si existiera otra solución distinta cuyo valor fuese mayor, necesariamente debería satisfacer las condiciones de KKT, luego al menos uno de los multiplicadores debería ser igual a cero, con lo cual la función objetivo sería 0, lo que es una contradicción.

c) Como $\lambda=\dfrac{\alpha x^{\alpha-1}y^{1-\alpha}}{p_1}$, basta reemplazar los valores obtenidos anteriormente.

P5. Resuelva utilizando las condiciones de KKT

$$\begin{aligned}\text{mín}\quad & x^2+y^2\\ s.a.\quad & x+y=5\\ & xy\geq 4\\ & (x-4)^2+(y-2)^2\leq 1\end{aligned}$$

Solución:

Como la función es continua y el conjunto de restricciones es compacto, entonces está asegurada la existencia de un punto que resuelve el problema. Notemos que el problema también se puede escribir como

$$\begin{aligned}\text{mín } x^2+y^2\\ x+y-5=0\\ 4-xy\leq 0\\ (x-4)^2+(y-2)^2-1\leq 0\end{aligned}$$

Imponiendo las condiciones de KKT se tiene

$$2x+\lambda-u_1y+u_2(2x-8)=0 \tag{2.1.8}$$
$$2y+\lambda-u_1x+u_2(2y-4)=0 \tag{2.1.9}$$
$$u_1(4-xy)=0 \tag{2.1.10}$$
$$u_2((x-4)^2+(y-2)^2-1)=0 \tag{2.1.11}$$
$$x+y-5=0 \tag{2.1.12}$$
$$4-xy\leq 0 \tag{2.1.13}$$
$$(x-4)^2+(y-2)^2-1\leq 0 \tag{2.1.14}$$
$$u_1,u_2\geq 0 \tag{2.1.15}$$
$$\lambda\in\mathbb{R} \tag{2.1.16}$$

Separemos el análisis en 4 casos

a) $(u_1=0,u_2=0)$
de (2.1.8) y (2.1.9) se tiene que $x=y=-\frac{\lambda}{2}$ y de (2.1.12) se tiene que $p_1=(\frac{5}{2},\frac{5}{2})$ es el candidato, pero este punto no satisface (2.1.14), luego no puede corresponder a un mínimo.

b) $(u_1 \neq 0, u_2 = 0)$
De (2.1.10) se tiene que $xy = 4$ y de (2.1.12) se tienen 2 posibles puntos, $p_2 = (4,1)$ y $p_3 = (1,4)$, pero p_3 no satisface (2.1.14), luego no es un punto factible y al evaluar p_2 en (2.1.8) y (2.1.9) se tiene que $u_1 = -2$ lo que indica que tampoco es un punto de KKT.

c) $(u_1 = 0, u_2 \neq 0)$
De (2.1.11) se tiene que $(x-4)^2 + (y-2)^2 = 1$ y de (2.1.12) se tienen 2 posibles puntos, $p_4 = (4,1)$ y $p_5 = (3,2)$, pero al evaluar p_4 en (2.1.8) y (2.1.9) se tiene que $u_2 = -3$ lo que indica que no es un punto de KKT. Sin embargo, al evaluar p_5 en (2.1.8) y (2.1.9) se tiene que $u_2 = 1$, luego p_5 es un candidato a solución.

d) $(u_1 \neq 0, u_2 \neq 0)$
De (2.1.10) se tiene que $xy = 4$, de (2.1.11) se tiene que $(x-4)^2 + (y-2)^2 = 1$ y de (2.1.12) se tiene que la única solución posible es $p_6 = (4,1)$, pero al evaluar p_6 en (2.1.8) y (2.1.9) se tiene que $u_1 = 8 + \lambda$ y $u_2 = -\frac{30+3\lambda}{2}$, pero como $u_1 \geq 0$ se tiene que $\lambda \geq -8$ entonces $u_2 \leq -3 < 0$ lo cual no puede ser. Luego p_6 no es punto de KKT.

Como está asegurada la existencia de un mínimo, este debe ser $p_5 = (3,2)$.

P6. Encuentre el máximo de la integral

$$J(x,y) = \int_x^y (e^{-t} - e^{-2t})dt$$

respecto a los límites de integración sujeto a la restricción $y - x = c$, donde $c \neq 0$ es una constante.
Solución:
El problema se puede plantear como

$$\begin{array}{rl} -\text{mín} & -J(x,y) \\ s.a. & y - x - c = 0 \end{array}$$

Para imponer las condiciones de KKT, que en este caso se reducen a Multiplicadores de Lagrange, necesitamos calcular $\nabla J(x,y)$, para ello calculemos las derivadas parciales de $J(x,y)$, apoyándonos en el teorema fundmental del cálculo

$$\frac{\partial J}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\int_y^x (e^{-t} - e^{-2t})dt\right) = -(e^{-x} - e^{-2x})$$
$$\frac{\partial J}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int_x^y (e^{-t} - e^{-2t})dt\right) = e^{-y} - e^{-2y}$$

Luego, imponiendo las condiciones se tiene que

$$-\frac{\partial J}{\partial x}(x,y) - \lambda = e^{-x} - e^{-2x} - \lambda = 0$$
$$-\frac{\partial J}{\partial y}(x,y) + \lambda = -e^{-y} + e^{-2y} + \lambda = 0$$
$$\lambda \in \mathbb{R}$$

lo que implica que

$$e^{-x} - e^{-2x} = e^{-y} - e^{-2y} = e^{-x}e^{-c} - e^{-2c}e^{-2x}$$

más aún

$$(1 - e^{-c})e^{-x} = (1 - e^{-2c})e^{-2x} \quad \Longrightarrow \quad e^x = \frac{1 - e^{-2c}}{1 - e^{-c}} > 0$$

Luego $x = \ln\left(\frac{1 - e^{-2c}}{1 - e^{-c}}\right)$ e $y = \ln\left(\frac{1 - e^{-2c}}{1 - e^{-c}}\right) + c$ es la solución.

2.1.2. Problemas Propuestos

P1. Resuelva utilizando las condiciones de KKT

$$\begin{array}{rc} \text{máx} & x_1 - e^{-x_2} \\ s.a. & \sin(x_1) + x_2 \leq 0 \\ & x_1 \leq 3 \end{array}$$

P2. Considere la siguiente familia de problemas de programación cuadrática:

$$\begin{array}{c} \min \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 - x_1 - 2x_2 \\ x_1 + x_2 - \kappa \geq 0 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

donde $\kappa \in \mathbb{R}$. Llamaremos instancia de esta familia de problemas, a uno particular, es decir, para un $\kappa \in \mathbb{R}$ fijo.

a) Entregue una interpretación geométrica de una instancia de esta familia de problemas.

b) Explique por qué una instancia particular siempre tiene una solución óptima.

c) Usando las condiciones de KKT, verifique que $(3/2, 5/2)^T$ resuelve la instancia dada por $\kappa = 4$

d) Encuentre los valores de κ para los cuales las soluciones de las correspondientes instancias se encuentran en la frontera de la región factible. Encuentre también los óptimos de estas instancias y los multiplicadore de KKT asociados.

e) Con las mismas condiciones de la parte anterior, compare el valor del multiplicador de KKT asociado a la restricción $x_1 + x_2 - \kappa \geq 0$ y la derivada del valor óptimo de la función objetivo con respecto a κ.

f) ¿Cuál es la solución óptima para una instancia arbitraria de esta familia de problemas, tal que sea alcanzada en un punto al interior de la región factible?

P3. Sean $f, g_i, h_j \in C^1$ $\forall i = 1, \ldots, m$ $\forall j = 1, \ldots, l$. Dados $u \in \mathbb{R}^m,\ u \geq 0,\ v \in \mathbb{R}^l$, considere el problema

$$(\mathcal{P}_l) \qquad \begin{array}{ll} \text{mín} & f(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i g_i(x) + \sum_{j=1}^{l} v_j h_j(x) \\ \text{s.a.} & x \in \mathbb{R}^n \end{array}$$

Probar que si $\bar{x}$ es solución de $(\mathcal{P}_l)$ entonces también es solución del problema

$$(\mathcal{P}) \qquad \begin{array}{lll} \text{mín} & f(x) & \\ \text{s.a.} & g_i(x) \leq g_i(\bar{x}) & \forall i \in I := \{\ i \ /\ u_i > 0\} \\ & h_j(x) = h_j(\bar{x}) & \forall j = 1, \ldots, m \end{array}$$

P4. Sea P_2 el espacio vectorial de los polinomios a valores reales de grado menor igual a 2.
Consideremos la función $J : P_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$J(f) = \int_0^1 f(x)^2 dx$$

Sea $Q = \{f \in P_2 : f(1) = 1\}$. Se sabe que J alcanza un mínimo sobre Q.
Nuestro objetivo es encontrar dicho mínimo, para ello proceda de la siguiente forma:

a) Sea $f(x) \in P_2$, es decir, $f(x) = ax^2 + bx + c$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$. Pruebe que existe $G : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $G(a,b,c) = J(f)$. Además pruebe que $f \in Q$ si y sólo si $a+b+c = 1$.

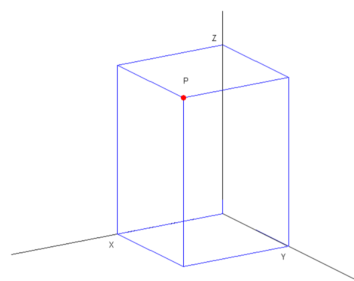
b) Resuelva el problema $\text{mín}\, G(a,b,c)$ s.a. $a+b+c = 1$

c) Encuentre $f^* \in P_2$ tal que $J(f^*) \leq J(f)$ $\forall f \in P_2$. Concluya.

P5. Una caja rectangular está situada en el primer octante como se muestra en la figura, con una de sus esquinas en el origen y con las tres caras adyacentes a los planos formados por los ejes coordenados. El punto opuesto $P = (x,y,z)$ está restringido a la superficie del paraboloide de ecuación $x^2 + y^2 + z = 1$. Determine las coordenadas de P para que la caja sea de volumen máximo, para ello:

a) Pruebe que el problema se puede escribir como maximizar $f(x,y) = xy - x^3y - xy^3$, y determine los punto críticos de f que caen en el primer cuadrante ($x > 0,\ y > 0$). Además determine la naturaleza de dicho(s) punto(s) crítico(s). Determine P.

b) En vez de sustituir z, uno también podría utilizar Multiplicadores de Lagrange para maximizar el volumen $V = xyz$ con la misma restricción. Resuelva y compare con su solución anterior.



P6. (Programación Cuadrática)

Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ simétrica, $C \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ de rango m, $b \in \mathbb{R}^n$ y $d \in \mathbb{R}^m$.

Suponga que

$$v^T Av > 0 \quad \forall v \in \text{Ker}\, C = \{u \in \mathbb{R}^n :\ Cu = 0\}.$$

Considere el siguiente problema

$$(Q) \quad \begin{array}{ll} \text{mín} & \frac{1}{2}x^T Ax + b^T x \\ \text{s.a.} & Cx = d \end{array}$$

a) Muestre que la matrix P es invertible, donde

$$P = \begin{bmatrix} A & C^T \\ C & 0 \end{bmatrix}.$$

b) Escriba las condiciones de KKT del problema y muestre que tienen solución única.

c) Si A es definida positiva, encuentre explícitamente la solución de (Q).

Capítulo 3

Programación Lineal

3.1. Algoritmo Simplex

3.1.1. Problemas Resueltos

P1. Resolver usando fase 1 y fase 2 de simplex el problema

$$(P)\begin{cases} \min & 3x_1+x_2+9x_3+x_4 \\ \text{s.a.} & x_1+2x_3+x_4=4 \\ & x_2+x_3-x_4=2 \\ & x_i\geq 0 \end{cases}$$

Solución: Se aplica la fase 1 de simplex:

$$(P_a)\begin{cases} \min & x_5+x_6 \\ \text{s.a.} & x_1+2x_3+x_4+x_5=4 \\ & x_2+x_3-x_4+x_6=2 \\ & x_i\geq 0 \end{cases}$$

Notando que

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se escogen x_5, x_6 en la base, luego $B=I$ y por lo tanto $B^{-1}=I$, $B^{-1}N=N$, $B^{-1}b=b$.
El cuadro inicial es:

$$\begin{array}{cccccc|c} -1 & -1 & -3 & 0 & 0 & 0 & -6 \\ \hline 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & \boxed{1} & -1 & 0 & 1 & 2 \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{cccccc|c} -1 & 2 & 0 & -3 & 0 & 3 & 0 \\ \hline \boxed{1} & -2 & 0 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & -2 & 0 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{array}$$

A partir de la tabla final, se escoge B como la submatriz de A formada con las columnas de x_1 y x_3.

Fase II:

$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ y de la tabla final de fase 1 se observa que:

$$B^{-1}N = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B^{-1}b = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Además se tiene:

$$C_B^T = (3,9) \quad \Rightarrow \quad -C_B^T B^{-1} b = -(3,9)\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = -18$$

$$C_N^T = (1,1) \quad \Rightarrow \quad \overline{C_N}^T = (1,1) - (3,9)\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = (-2,1)$$

El cuadro inicial es:

$$\begin{array}{cccc|c} 0 & -2 & 0 & 1 & -18 \\ \hline 1 & -2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -1 & 2 \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{cccc|l} 0 & 0 & 2 & -1 & -14 \\ \hline 1 & 0 & 2 & \boxed{1} & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{cccc|l} 1 & 0 & 4 & 0 & -10 \\ \hline 1 & 0 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 6 \end{array}$$

por lo tanto $\bar{x} = (0,6,0,4)$ con $\bar{z} = 10$.

P2. Una empresa produce espirales, corbatitas y fetuccinis. La producción se basa en 2 recursos principales, R_1 y R_2 y que son limitados. Producir corbatitas aumenta en 2 unidades la disponibilidad de R_1, mientras que producir espirales aumenta en 1 unidad la disponibilidad del R_2, por otro lado producir fetuccinis y espirales disminuye en 2 y 1 unidades respectivamente la disponibilidad de R_1, mientras que producir corbatitas y fetuccinis disminuye en 3 y 1 unidades respectivamente la disponibilidad de R_2. Si inicialmente hay una disponibilidad de 10 unidades de R_1 y 20 unidades de R_2 y los precios en el mercado de corbatitas, fetuccinis y espirales son de 3, 7 y 2 respectivamente, plantee el problema que resuelve la empresa para planificar su producción y obtenga la cantidad que corbatitas, fetuccinis y espirales que produce.

Solución: Sea $x_1 =$ Cantidad de corbatitas, $x_2 =$ Cantidad de fetuccinis, $x_3 =$ Cantidad de espirales. El problema que resuelve la empresa es:

$$(P)\left\{\begin{array}{lll} \min & -3x_1 - 7x_2 - 2x_3 & \\ \text{s.a.} & 2x_2 + x_3 & \leq 10 + 2x_1 \\ & 3x_1 + x_2 & \leq 20 + x_3 \\ & x_1, x_2, x_3 & \geq 0 \end{array}\right.$$

$$\rightsquigarrow \left\{\begin{array}{lll} \min & -3x_1 - 7x_2 - 2x_3 + 0s_1 + 0s_2 & \\ \text{s.a.} & -2x_1 + 2x_2 + x_3 + s_1 & = 10 \\ & 3x_1 + x_2 - x_3 + s_2 & = 20 \\ & x_1, x_2, x_3, s_1, s_2 & \geq 0 \end{array}\right.$$

Sean

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Así

$$C_B{}^T = (0,\ 0), \quad C_N{}^T = (-3,\ -7,\ -2), \quad \overline{C_N}^T = (-3,\ -7,\ -2)$$

Entonces el cuadro inicial es:

$$\begin{array}{ccccc|c} -3 & -7 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -2 & \boxed{2} & 1 & 1 & 0 & 10 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & 1 & 20 \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{ccccc|c} -10 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{7}{2} & 0 & 35 \\ \hline -1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 5 \\ \boxed{4} & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 15 \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & -\frac{9}{4} & -\frac{9}{4} & \frac{5}{2} & \frac{145}{2} \\ \hline 0 & 1 & \boxed{\frac{1}{8}} & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} & \frac{35}{4} \\ 1 & 0 & -\frac{3}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{15}{4} \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{ccccc|c} 0 & 18 & 0 & 9 & 7 & 230 \\ \hline 0 & 8 & 1 & 3 & 2 & 70 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 1 & 30 \end{array}$$

Por lo tanto la solución de (P) es $x_1 = 30$, $x_2 = 0$, $x_3 = 70$

P3. Llevar el siguiente problema a su forma canónica

$$\begin{array}{rl} \text{mín} & x_1 + |x_2| + x_3 \\ \text{s.a.} & x_1 + x_2 \leq 2 \\ & 2x_1 + x_3 = 0 \end{array}$$

Solución: Notar que $|x_2| = \text{máx}\{x_2, -x_2\}$ luego la función objetivo puede escribirse como

$$\text{máx}\{x_1 + x_2 + x_3, x_1 - x_2 + x_3\}$$

y el problema se transforma en

$$\begin{array}{rc} \text{mín} & \text{máx}\{x_1 + x_2 + x_3, x_1 - x_2 + x_3\} \\ \text{s.a.} & x_1 + x_2 \leq 2 \\ & 2x_1 + x_3 = 0 \end{array}$$

y este problema a su vez puede escribirse como

$$\begin{array}{rc} \text{mín} & x_4 \\ \text{s.a.} & x_1 + x_2 \leq 2 \\ & 2x_1 + x_3 = 0 \\ & x_1 + x_2 + x_3 \leq x_4 \\ & x_1 - x_2 + x_3 \leq x_4 \end{array}$$

Agregando variables de holgura se obtiene

$$\begin{array}{rc} \text{mín} & x_4 \\ \text{s.a.} & x_1 + x_2 + x_5 = 2 \\ & 2x_1 + x_3 = 0 \\ & x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_6 = 0 \\ & x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_7 = 0 \\ & x_5, x_6, x_7 \geq 0 \end{array}$$

y finalmente desdoblando las variables irrestrictas, es decir, escribiendo $x_i = y_i - z_i$ con $y_i, z_i \geq 0$ $\forall i = 1, \ldots, 4$, se tiene

$$\begin{array}{rc} \text{mín} & y_4 - z_4 \\ \text{s.a.} & y_1 - z_1 + y_2 - z_2 + x_5 = 2 \\ & 2y_1 - 2z_1 + y_3 - z_3 = 0 \\ & y_1 - z_1 + y_2 - z_2 + y_3 - z_3 - y_4 + z_4 + x_6 = 0 \\ & y_1 - z_1 - y_2 + z_2 + y_3 - z_3 - y_4 + z_4 + x_7 = 0 \\ & y_1, \ldots y_4, z_1, \ldots, z_4, x_5, x_6 x_7 \geq 0 \end{array}$$

P4. Resolver con Simplex

$$(P)\begin{cases} \min & \dfrac{x_1+1}{x_2+2} \\ \\ \text{s.a.} & x_1+x_2 \leq 1 \\ & x_1,x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Solución: Sean $z=\dfrac{1}{x_2+2}$, $y_1=\dfrac{x_1}{x_2+2}$ e $y_2=\dfrac{x_2}{x_2+2}$. Se cumple la relación $2z+y_2=1$. Luego (P) es equivalente a (P')

$$(P')\begin{cases} \min & y_1+z \\ \\ \text{s.a.} & y_1+y_2 \leq z \\ & 2z+y_2 = 1 \\ & y_1,\ y_2,\ z \geq 0 \end{cases}$$

Por lo tanto se resuelve (P'), agregando variables de holgura:

$$(P')\begin{cases} \min & y_1+z \\ \\ \text{s.a.} & y_1+y_2-z+s_1 = 0 \\ & 2z+y_2 = 1 \\ & y_1,\ y_2,\ z,\ s_1 \geq 0 \end{cases}$$

Luego

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad b=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C^T=(1,0,1,0)$$

Escogiendo a z y a s_1 en la base se tiene:

$$B=\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad N=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

así

$$C_B{}^T=(1,\ 0), \quad C_N{}^T=(1,\ 0)$$

$\Rightarrow$

$$B^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad B^{-1}N=\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$B^{-1}b=\left(\ \tfrac{1}{2},\quad \tfrac{1}{2}\ \right), \quad -C_B{}^TB^{-1}b=-(1,\ 0)\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}=-\frac{1}{2}$$

Luego

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ \hline 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \boxed{-\frac{3}{2}} & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{cccc|c} \frac{4}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \hline -\frac{1}{3} & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array}$$

Por lo tanto la solución de (P') es:

$$y_1 = 0, \quad y_2 = \frac{1}{3}, \quad z = \frac{1}{3}, \quad s_1 = 0$$

Reemplazando en las variables de (P) se tiene que la solución es:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad \Rightarrow \quad z = \frac{1}{3}$$

P5. Resolver con Simplex

$$(P)\begin{cases} \min & f(x_1,x_2) = \text{máx}\{x_1-2,x_2\} \\ & \\ \text{s.a.} & x_1 + |x_2| \quad \leq 1 \\ & x_1 \quad \geq 0 \end{cases}$$

Solución: Equivalentemente

$$(P)\begin{cases} \text{mín} & \text{máx}\{x_1-2,x_2\} \\ & \\ \text{s.a.} & x_2 \quad \leq 1-x_1 \\ & x_2 \quad \geq x_1-1 \\ & x_1 \quad \geq 0 \end{cases}$$

Sea $x_2 = u - v$, con $u, v \geq 0$. (P) es equivalente a:

$$(P)\begin{cases} \text{mín} & \text{máx}\{x_1-2,u-v\} \\ & \\ \text{s.a.} & u-v+x_1 \quad \leq 1 \\ & x_1-u+v \quad \leq 1 \\ & x_1,u,v \quad \geq 0 \end{cases}$$

A la vez el problema es equivalente a:

$$(P)\begin{cases} \text{mín} & z \\ & \\ \text{s.a.} & u-v+x_1 \quad \leq 1 \\ & x_1-u+v \quad \leq 1 \\ & x_1-2 \quad \leq z \\ & u-v \quad \leq z \\ & x_1,u,v \quad \geq 0 \end{cases}$$

Finalmente el problema es equivalente a:

$$(P)\begin{cases} \text{mín} & r-s \\ & \\ \text{s.a.} & u-v+x_1 \quad \leq 1 \\ & x_1-u+v \quad \leq 1 \\ & x_1-r+s \quad \leq 2 \\ & u-v-r+s \quad \leq 0 \\ & x_1,u,v,r,s \quad \geq 0 \end{cases}$$

Agregando variables de holgura:

$$(P)\begin{cases} \text{mín} & r-s & \\ & & \\ \text{s.a.} & u-v+x_1+s_1 & =1 \\ & x_1-u+v+s_2 & =1 \\ & x_1-r+s+s_3 & =2 \\ & u-v-r+s+s_4 & =0 \\ & x_1,u,v,r,s,s_1,s_2,s_3,s_4 & \geq 0 \end{cases}$$

Escogiendo $B=I$, es fácil obtener el cuadro inicial

$$\begin{array}{ccccccccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{ccccccccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \begin{array}{ccccccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

Luego, la solución es:

$$x_1=0, \quad w=0, \quad v=1, \quad r=0, \quad s=1$$

En el problema original

$$x_2=u-v=-1, \quad z=-1$$

P6. Suponga que estamos resolviendo el problema:

$$\begin{array}{cc} \text{mín} & c^T x \\ s.a & Ax=b \\ & x\geq 0 \end{array}$$

Y que llegamos a la siguiente tabla de Fase II:

$(-z)$	0	1	0	c_1	14
0	1	1	0	a_1	b_1
0	0	-2	1	a_2	b_2

a) Identifique la solución en curso y diga condiciones para que sea factible.

b) Diga condiciones para que la solución en curso sea óptima.

c) Diga condiciones que aseguren que la solución óptima es la única solución factible óptima.

d) Diga condiciones que garanticen que el valor objetivo es no acotado.

e) Diga condiciones para que la solución óptima sea degenerada.

f) Asumiendo las condiciones en *(a)*, de todas las condiciones bajo las cuales usted haría un pivote en el elemento a_1.

Solución:

a) La solución en curso es (b_1, b_2) que es factible si $b_1 \geq 0 \wedge b_2 \geq 0$

b) La solución en curso es óptima si $b_1 \geq 0$, $b_2 \geq 0 \wedge c_1 \geq 0$

c) La solución óptima es única si $b_1 \geq 0$, $b_2 \geq 0$ y $c_1 > 0$ (notar que si $c_1 = 0$ es posible que se pueda hacer ingresar x_4 a la base sin cambiar el valor de la función objetivo).

d) El problema es no acotado si $c < 0$, $a_1 < 0$ y $a_2 < 0$.

e) La solución óptima es degenerada si se cumple *(b)* y $(b_1 = 0 \vee b_2 = 0)$

f) Se pivotea en a_1 si $c_1 < 0$ y también se cumple uno de los dos casos:

1) $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $\dfrac{b_1}{a_1} < \dfrac{b_2}{a_2}$
2) $a_1 > 0$, $a_2 \leq 0$

3.1.2. Problemas Propuestos

P1. Un productor de electricidad debe planificar su producción horaria de energía para maximizar sus beneficios por venta de la misma en un horizonte de 2 horas. Formule y resuelva el PPL que consiste en maximizar los beneficios del productor si

- Se producen 5 unidades de energía antes del periodo de planificación.
- Los precios horarios de la energía son 6 y 2 unidades monetarias.
- La energía mínima que se puede producir en cada hora es 0 y la máxima 10 unidades.
- Las producciones de energía en dos horas consecutivas no pueden diferir más de 4 unidades.
- El coste de producción es 3 unidades monetarias por unidad de energía.

P2. Considere el problema fraccional:

$$\begin{array}{rrcl} (F)\ \text{mín} & \dfrac{x_2-6}{x_1+x_2+2} & & \\ & -x_1+x_2 & \leq & 3 \\ & x_1+2x_2 & \leq & 12 \\ & x_1,x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

a) Definiendo $y = \frac{x}{x_1+x_2+2} \in \mathbb{R}^2$, y z convenientemente, pruebe que (F) es equivalente al problema lineal:

$$\begin{array}{rrcl} (P)\ \mathit{min} & y_2-6z & & \\ & -y_1+y_2-3z & \leq & 0 \\ & y_1+2y_2-12z & \leq & 0 \\ & y_1+y_2+2z & = & 1 \\ & y_1,y_2,z & \geq & 0 \end{array}$$

b) Resuelva usando Simplex, verifique su solución resolviendo gráficamente el problema (P) y finalmente deduzca una solución de (F).

P3. Considere el problema

$$\begin{array}{rlll} (P) & \text{mín} & |x_1|-x_2 & \\ & s.a. & x_1+|x_2| & \leq 1 \\ & & 2|x_1|-|x_2| & \leq 2 \end{array}$$

Transforme el problema a un PPL y resuelva usando Simplex.

P4. Considere el siguiente PPL

$$\begin{array}{rlll} (P) & \text{máx} & x_1+2x_2 & \\ & s.a. & x_1+x_2 & \leq 1 \\ & & x_1 & \leq 1 \\ & & x_1,x_2 & \geq 0 \end{array}$$

Escriba el problema en su forma estándar. Muestre que el método de Simplex entra en un proceso cíclico infinito si escoge como base inicial las variables (x_1,x_2). Observe cómo la desigualdad $x_1 \leq 1$ es rebundante. ¿Si se elimina esta restricción, se detiene el método?, i.e. ¿encuentra solución?

P5. Considere el problema:

$$(P_\alpha)\ \text{mín}\ Z(\alpha) = \alpha x_1 + x_3$$

$$
\begin{aligned}
x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\
-x_1 + x_3 + x_5 &= 2 \\
x_1 - x_3 + x_4 &= 3 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0
\end{aligned}
$$

a) Resuélvalo usando Simplex, indicando el conjunto solución:

$$\Psi(\alpha) = \{x \in \mathbb{R}^n / x \quad es \quad solucion \quad de \quad (P_\alpha)\}$$

para cada $\alpha \in [-1, 1]$.

b) Grafique $Z(\alpha)$ y encuentre su valor óptimo α^* donde $\alpha^* \in [-1, 1]$.

P6. Considere el problema de Programación Lineal:

$$
\begin{array}{llllllll}
(P)\ min & x_1 & -2x_2 & -4x_3 & +2x_4 & & \\
 & x_1 & & -2x_3 & +x_4 & = & 4 \\
 & x_1 & +x_2 & +x_3 & -x_4 & = & 8 \\
 & & & & x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq & 0
\end{array}
$$

a) Usando Fase I del algoritmo Simplex, determine un punto extremo del poliedro factible de (P).

b) A partir de la base obtenida en (a), resuelva (P) usando Fase II del algoritmo Simplex.

P7. Considere el cuadro, (correspondiente a un problema de programación lineal canónico)

$$
\begin{array}{ccccc|c}
-\gamma & 2 & 0 & 0 & 0 & 10 \\
\hline
-1 & \delta & 1 & 0 & 0 & 4 \\
\alpha & -4 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
\beta & 3 & 0 & 0 & 1 & \theta
\end{array}
$$

Indique en qué condiciones:

(a) La solución en curso en óptima y es única (¿Cuáles?).

(b) El problema es no acotado (¿Cuál es la dirección extrema correspondiente?).

(c) La solución en curso es óptima pero no es única (indique el conjunto solución).

(d) La solución en curso es factible, pero no es óptima (realice, a partir de ella, una iteración más, usando datos adecuados).

(e) El problema no tiene solución factible.

Capítulo 4

Dualidad en Programación Lineal

4.1. Dualidad y Análisis de Sensibilidad

4.1.1. Problemas Resueltos

P1. Considere el siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{array}{llll} (P) & \text{mín} & 2x_1+3x_2+4x_3 & \\ & s.a. & x_1+2x_2+x_3 & \geq 3 \\ & & 2x_1-x_2+3x_3 & \geq 4 \\ & & x_1,x_2,x_3 & \geq 0 \end{array}$$

a) Escriba el problema Dual asociado.

b) Resuelva el problema primal, usando el algoritmo de simplex dual.

Solución:

a) Notemos que el problema primal (P) es de la forma

$$\begin{array}{lll} (P) & \text{mín} & c^t x \\ & s.a. & Ax \geq b \\ & & x \geq 0 \end{array}$$

luego su dual es de la forma

$$\begin{array}{lll} (D) & \text{máx} & b^t y \\ & s.a. & A^t y \leq c \Leftrightarrow \\ & & y \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{llll} (D) & \text{máx} & 3y_1+4y_2 & \\ & s.a. & y_1+2y_2 & \leq 2 \\ & & 2y_1-y_2 & \leq 3 \\ & & y_1+3y_2 & \leq 4 \\ & & y_1,y_2 & \geq 0 \end{array}$$

b) El problema se puede escribir en forma canónica como

$$\begin{array}{llll} (P) & \text{mín} & 2x_1+3x_2+4x_3 & \\ & s.a. & -x_1-2x_2-x_3+x_4 & =-3 \\ & & -2x_1+x_2-3x_3+x_5 & =-4 \\ & & x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 & \geq 0 \end{array}$$

tomamos como base (x_4,x_5) luego $B=I$ y $B^{-1}=I$, luego el cuadro inicial de Simplex queda

2	3	4	0	0	0
-1	-2	-1	1	0	-3
$\boxed{-2}$	1	-3	0	1	-4 ←

luego x_1 entra a la base y sale x_5, la nueva tabla es

0	4	1	0	1	-4
0	$\boxed{-5/2}$	-1	1	0	-1 ←
1	1	-3	0	1	2

luego x_2 entra a la base y sale x_4, la nueva tabla y la definitiva es

0	0	9/5	8/5	1/5	-28/5
0	1	-1/5	-2/5	1/5	2/5
1	0	7/5	-1/5	-2/5	11/5

Finalmente la solución es $x_1 = 11/5$ y $x_2 = 2/5$ y el valor óptimo $z^* = 28/5$.

P2. Considere $n \geq 2$ y el siguiente problema de P.L.

$$(P)\begin{cases} \text{mín} & x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n \\ s.a. & x_1 \geq 1 \\ & x_1 + x_2 \geq 2 \\ & \vdots \quad \vdots \quad \ddots \\ & x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq n \\ & x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0 \end{cases}$$

a) Determine el dual (D) de (P)

b) Verificar que se cumple el teorema de dualidad fuerte.

c) Probar que $\forall y$ factible de (D), se tiene que $y_k + y_{k+1} + \ldots + y_n < k \ \forall k \in \{2,\ldots,n\}$

d) Deducir del teorema de holgura complementaria el óptimo de (P)

Solución:

a) Notemos que el problema primal (P) es de la forma

$$\begin{array}{lll} (P) & \text{mín} & c^t x \\ & s.a. & Ax \geq b \\ & & x \geq 0 \end{array}$$

luego su dual es

$$\begin{array}{lll} (D) & \text{máx} & y_1 + 2y_2 + \ldots + ny_n \\ & s.a. & y_1 + y_2 + \ldots + y_n \leq 1 \\ & & y_2 + \ldots + y_n \leq 2 \\ & & \ddots \quad \vdots \\ & & y_n \leq n \\ & & y_1, y_2, \ldots, y_n \geq 0 \end{array}$$

b) Notemos que (P) y (D) son factibles pues $\bar{x} = (1,\ldots,1)$ y $\bar{y} = (0,\ldots,0)$ satisfacen las restricciones, respectivamente. Y como por dualidad débil se tiene que $b^t y \leq c^t x$, entonces ambos problemas son acotados y sus valores óptimos deben coincidir.

c) Sea $y = (y_1, ..., y_k)$ factible de (D) y $k \in \{2, ..., n\}$, luego

$$y_k + y_{k+1} + ... + y_n = y_1 + y_2 + ... + y_n \leq 1 < k.$$

d) Sea $\bar{x}$ óptimo de (P) y $\bar{y}$ óptimo de (D), por Holgura complementaria se sabe que en el óptimo $\bar{x}_k(c - A^t\bar{y})_k = 0\ \forall k = 1, ..., n$. Como $\bar{y}$ es óptimo de (D), es en particular factible, luego por parte anterior $(c - A^t\bar{y})_k = k - y_k + y_{k+1} + ... + y_n > 0$ si $k \in \{2, ..., n\}$, esto implica que $\bar{x}_k = 0$ si $k \in \{2, ..., n\}$. Finalmente el problema dual se tranforma en

$$(P) \quad \begin{array}{lll} \text{mín} & x_1 & \\ s.a. & x_1 & \geq 1 \\ & x_1 & \geq 2 \\ & \vdots & \\ & x_1 & \geq n \\ & x_1 \geq 0 & \end{array}$$

cuya solución es $x_1 = n$. Luego la solución de (P) es $x = (n, 0, ..., 0)$.

P3. Una florista sabe hacer solo 2 tipos distintos de arreglos florales (x_1 y x_2) para los cuales dispone 3 tipos distintos de flores: rosas, tulipanes e ibizcos. Los requerimientos de flores para cada arreglo, la disponibilidad de flores y los precios de cada arreglo vienen dados por:

FLORES	x_1	x_2	**DISPONIBILIDAD**
Rosas	3	1	300
Tulipanes	1	1	140
Ibizcos	1	3	300
PRECIO	2000	1000	−

a) Plantee el problema al que se enfrenta la florista para optimizar su producción.

b) Calcule el dual del problema. ¿Qué representa?

c) Si el óptimo del problema primal es $x_1 = 80, x_2 = 60$, encuentre el óptimo del problema dual.

Solución:

a)

$$\begin{array}{lrl} \text{máx} & 2000x_1 + 1000x_2 & \\ & & \\ \text{s.a.} & 3x_1 + x_2 & \leq 300 \\ & x_1 + x_2 & \leq 140 \\ & x_1 + 3x_2 & \leq 300 \\ & x_1, x_2 & \geq 0 \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{lll} \text{mín} & 300y_1 + 140y_2 + 300y_3 & \\ \text{s.a.} & 3y_1 + y_2 + y_3 & \geq 2000 \\ & y_1 + y_2 + y_3 & \geq 1000 \\ & y_1 + y_2 + 3y_3 & \leq 300 \\ & y_1, y_2, y_3 & \geq 0 \end{array}$$

El dual representa el problema de un agente externo que quiere saber que precio unitario ofrecer por cada una de las flores si quiere comprarle todas las flores a la florista. Así y_1, y_2 e y_3 son los precios asociados a las rosas, tulipanes e ibizcos.

c) Por el teorema de holgura complementaria se tiene:

1) $(3\bar{x}_1+\bar{x}_2-300)\cdot\bar{y}_1=0$
2) $(\bar{x}_1+\bar{x}_2-140)\cdot\bar{y}_2=0$
3) $(\bar{x}_1+3\bar{x}_2-300)\cdot\bar{y}_3=0$
4) $(2000-3\bar{y}_1-\bar{y}_2-\bar{y}_3)\cdot\bar{x}_1=0$
5) $(1000-\bar{y}_1-\bar{y}_3-\bar{y}_3)\cdot\bar{x}_2=0$

Como $\bar{x}_1=80$ y $\bar{x}_2=60$, se tiene que:

1) $\Rightarrow \bar{y}_1\in\mathbb{R}$
2) $\Rightarrow \bar{y}_2\in\mathbb{R}$
3) $\Rightarrow \bar{y}_3=0$
4) $\Rightarrow 3\bar{y}_1+\bar{y}_2=2000$
5) $\Rightarrow \bar{y}_1+\bar{y}_2=1000$

Resolviendo el sistema:

$$\bar{y}_1=500,\quad \bar{y}_2=500,\quad \bar{y}_3=0$$

Notar que el valor óptimo de ambos problemas es 220000.

¿Cómo se interpreta esto? La florista venderá rozas y tulipanes a un precio de \$500 cada una y entregará como *oferta* los ibizcos gratis, pero esto solo si se vende todo como un paquete. Esto toma sentido pues si vende todas las rosas y tulipanes (dado que solo sabe hacer los arreglos florales descritos) no podrá sacarle provecho alguno a los ibizcos.

P4. Dado el siguiente PPL

$$\begin{array}{rlrcl}
(P) & \text{mín} & 8x_1-9x_2+12x_3+4x_4+11x_5 & & \\
 & s.a. & 2x_1-3x_2+4x_3+x_4+3x_5 & \leq & 1 \\
 & & x_1+7x_2+3x_3-2x_4+x_5 & \leq & 1 \\
 & & 5x_1+4x_2-6x_3+2x_4+3x_5 & \leq & 22 \\
 & & x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 & \geq & 0
\end{array}$$

Escriba el dual de este problema. Determine si el punto $x=(0,2,0,7,0)$ es solución óptima del problema.

Solución: El dual del problema es

$$\begin{array}{rlrcl}
(D) & \text{máx} & y_1+y_2+22y_3 & & \\
 & s.a. & 2y_1+y_2+5y_3 & \leq & 8 \\
 & & -3y_1+7y_2+4y_3 & \leq & -9 \\
 & & 4y_1+3y_2-6y_3 & \leq & 12 \\
 & & y_1-2y_2+2y_3 & \leq & 4 \\
 & & 3y_1+y_2+3y_3 & \leq & 11 \\
 & & y_1,y_2,y_3 & \leq & 0
\end{array}$$

Es fácil ver que el punto es factible de (P). Como la segunda restricción de (P), no se alcanza para el punto dado, pues $x_1+7x_2+3x_3-2x_4+x_5=0<1$, por el teorema de holgura complementaria se tiene que la variable del dual asociada a esta restricción, y_2, es 0 y que la 2° y 4° restricción del dual se alcanza con igualdad, pues $x_2,x_4>0$. Luego con esto se tiene

$$-3y_1+4y_3=-9$$
$$y_1-2y_3=4$$

Esto implica que $y_1 = \frac{17}{5}$ e $y_3 = \frac{3}{10}$, sin embargo, las variables duales debes ser negativas o cero, luego x no puede ser óptimo pues no existe una variable dual que satisfaga las condiciones del teorema de holgura complementaria.

P5. Sean $A \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^m$ y $c, p, q \in \mathbb{R}^n$, tal que $p \leq q$. Encuentre el dual de

$$\begin{array}{lll} (P) & \text{mín} & c^t x \\ & s.a. & Ax = b \\ & & p \leq x \leq q \end{array}$$

Pruebe que el dual siempre posee una solución factible.

Solución: El problema puede reescribirse como

$$\begin{array}{llll} (P) & \text{mín} & c^t x & \\ & s.a. & Ax = b & (1) \\ & & x \leq q & (2) \\ & & x \geq p & (3) \\ & & x \in \mathbb{R}^n & (4) \end{array}$$

Notemos que el problema tiene $m+n+n$ restricciones, pues (1) aporta m igualdades, (2) aporta n desigualdades $(\leq)$ y (3) aporta n desigualdades $(\geq)$, entonces las variables del dual y pertenecen a $\mathbb{R}^{m+2n}$, luego podemos suponer que tal variable es de la forma $y = (u, v, w)$ donde $u \in \mathbb{R}^m$ y $v, w \in \mathbb{R}^n$, tales que u está asociada a la restricción (1), v a la restricción (2) y w a la restricción (3). Utilizando la tabla de transformación de problemas primales-duales se tiene que el dual de (P) es

$$\begin{array}{lll} (D) & \text{máx} & b^t u + q^t v + p^t w \\ & s.a. & A^t u + v + w = c \\ & & u \in \mathbb{R}^m \\ & & v \leq 0 \\ & & w \geq 0 \end{array}$$

Además como $c_i \in \mathbb{R}\ \forall i = 1, \ldots, n$, luego $\exists r_i, s_i \geq 0$ tal que $c_i = r_i - s_i$. Luego tomando $u = 0$, $w_i = r_i$ y $v_i = -s_i\ \forall i = 1, \ldots, n$ se tiene que $A^t u + v + w = c$, $u \in \mathbb{R}^m$, $v \leq 0$ y $w \geq 0$, con lo cual el se puede concluir que el dual del (P) siempre es factible.

P6. Considere el problema lineal:

$$\begin{array}{lllll} (P) & \text{mín} & z = 5x_1 - 3x_2 & & \\ & s.a. & 2x_1 - x_2 + 4x_3 & \leq & 4 \\ & & x_1 + x_2 + 2x_3 & \leq & 5 \\ & & 2x_1 - x_2 + x_3 & \geq & 1 \\ & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

Dado el siguiente cuadro óptimo:

$$\begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{10}{3} & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 1 \end{array}$$

a) Escriba B, matriz de base (óptima) y B^{-1}.

b) Si z cambia a $z' = 5x_1 - 3x_2 + 2x_3$, ¿cambia la solución óptima?

c) Si b cambia a $b' = (5,4,1)$ (en el problema original), ¿cambia la solución óptima?

d) Si se introduce una nueva actividad u, cuyo costo unitario es 4 y cuya columna correspondiente es $N_u = (-1,-3,1)$, ¿cambia la solución óptima?

e) Si se agrega (al problema original) la restricción $x_1 + x_2 + x_3 \geq 5$ ¿cambia la solución óptima?

Solución:

a) El problema se puede escribir en forma canónica como

$$
\begin{array}{llrcr}
(P) & \text{mín} & 5x_1 - 3x_2 & & \\
 & s.a. & 2x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 & = & 4 \\
 & & x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 & = & 5 \\
 & & -2x_1 + x_2 - x_3 + x_6 & = & -1 \\
 & & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 & \geq & 0
\end{array}
$$

Recordemos que el cuadro final de simplex es de la forma

$$
\begin{array}{cc|c}
0 & c_N^t - c_B^t B^{-1} N & -c_B^t B^{-1} b \\
\hline
I & B^{-1} N & B^{-1} b
\end{array}
$$

Luego la base está formada por (x_2, x_1, x_3). Entonces

$$
B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}
$$

Notar que N, la submatriz asociada a las variables no básicas, es la identidad, luego $B^{-1}N = B^{-1}$, entonces del cuado final de simplex tenemos que

$$
B^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}
$$

b) Como sólo cambia $c^t = \begin{bmatrix} -3 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ a $(c')^t = \begin{bmatrix} -3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$ hay que verificar si los costos reducidos siguen siendo positivos, calculemos

$$
\bar{c}_N^t = c_N^t - c_B^t B^{-1} N = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 8/3 \end{bmatrix} \geq 0
$$

Luego la base no cambia y por lo tanto la solución tampoco.

c) Como lo único que cambia de el problema original es si $B^{-1}b \geq 0$ entonces la base se mantiene (si no hay que iterar con simplex dual). Con un simple cálculo, se puede ver que

$$
B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} \geq 0.
$$

Luego la base no cambia y la solución sigue siendo la misma.

d) Si se introduce una nueva actividad x_u, para ver si esta afecta en algo el resultado previamente obtenido debemos analizar el costo reducido asociado a esta variable, es decir

$$
\bar{c}_u^t = c_u^t - c_B^t B^{-1} N_u = \frac{17}{3} \geq 0
$$

Luego la base no cambia y la solución sigue siendo la misma.

e) Cuando se agrega una nueva restricción de la forma $d^t x \leq d_0$, el cuadro final de simplex es de la forma

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & c_N^t - c_B^t B^{-1} N & 0 & -c_B^t B^{-1} b \\ \hline I & B^{-1}N & 0 & B^{-1}b \\ 0 & d_N^t - d_B^t B^{-1} N & 1 & d_0 - d_B^t B^{-1} b \end{array}$$

pero $d_0 - d_B^t B^{-1} b = -1 \ngeq 0$, luego la base anterior no es óptima por lo que debemos iterar con simplex dual para encontrar una nueva base que sea óptima. El nuevo cuadro de Simplex queda

$$\begin{array}{ccccccc|c} 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{10}{3} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-\frac{1}{3}} & 1 & -\frac{1}{3} & 1 & -1 \end{array}$$

Luego x_7 sale de la base y entra x_4, quedando

$$\begin{array}{ccccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{7}{3} & \frac{8}{3} & 2 & -1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & -3 & 3 \end{array}$$

Finalmente la solución es $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 0$, $x_4 = 3$, $x_5 = 0$, $x_6 = 0$, $x_7 = 0$.

4.1.2. Problemas Propuestos

P1. Resuélvase el siguiente problema:

$$\begin{array}{llll} (P) & \text{máx} & 240x_1+104x_2+60x_3+19x_4 & \\ & s.a. & 20x_1+9x_2+6x_3+x_4 & \leq 20 \\ & & 10x_1+4x_2+2x_3+x_4 & \leq 10 \\ & & x_1,x_2,x_3,x_3 & \geq 0 \end{array}$$

Encuentre el dual de (P) y resuélvalo usando.

P2. Considere los problemas, duales entre sí

$$\begin{array}{llll} (P)\ min & c^T x & (D)\ max & b^T y \\ & Ax \geq b & & A^T y \leq c \\ & x \geq 0 & & y \geq 0 \end{array}$$

a) Si llamamos $u \geq 0$ al vector de variables de holgura de (P) y $s \geq 0$ al vector de variables de holgura de (D), demuestre que $(\bar{x},\bar{u})$ e $(\bar{y},\bar{s})$ respectivamente factibles, son óptimos sí y sólo sí

$$\bar{x}^T\bar{s} = 0 \quad \text{y} \quad \bar{u}^T\bar{y} = 0$$

b) Sea

$$L(x,y) = c^T x - y^T(Ax-b)$$

función de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$.

Demuestre que una condición necesaria y suficiente para que $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, $\bar{y} \in \mathbb{R}^m$ sean soluciones óptimas respectivas de (P) y (D) es que se cumpla

$$L(\bar{x},y) \leq L(\bar{x},\bar{y}) \leq L(x,\bar{y}) \quad \forall x \geq 0, y \geq 0$$

P3. Considere el juego en que el jugador X puede seleccionar cualquiera de m movimientos y el jugador Y puede elegir cualquiera de n movimientos. Si X selecciona i e Y selecciona j, entonces X gana una cantidad a_{ij} a Y.

El juego se repite muchas veces, lo cual podemos interpretar como que los jugadores desarrollan una estrategia 'mixta', en la que los distintos movimientos se hacen de acuerdo con probabilidades representadas por las componentes del vector $\mathbf{x} = (x_1,x_2,...,x_m)^T$, donde $x_i \geq 0$, $i = 1,2,...,m$ y $\sum_{i=1}^m x_i = 1$, en el caso del jugador X. Por su parte, Y desarrolla otra estrategia mixta $\mathbf{y} = (y_1,y_2,...,y_n)^T$, donde $y_i \geq 0$, $i = 1,2,...,n$ y $\sum_{i=1}^n y_i = 1$. Entonces el pago promedio a X es $\mathbf{P}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{x^t A y}$.

i) Suponga que X elige el vector x como solución del programa lineal

$$\begin{array}{lrcll} \text{max} & & \alpha & & \\ \text{s.a} & \sum_{i=1}^m x_i & = & 1 & \\ & \sum_{i=1}^m x_i a_{ij} & \geq & \alpha & j = 1,...,n \\ & x_i \geq 0 & & & i = 1,...,m \end{array}$$

Pruebe que a X se le garantiza una ganancia de al menos α, independientemente del y seleccionado por Y.

ii) Demuestre que el dual del problema anterior es:

$$\begin{array}{lrcll} \min & \beta & & & \\ \text{s.a} & \sum_{j=1}^{n} y_j & = & 1 & \\ & \sum_{j=1}^{n} y_j a_{ij} & \leq & \beta & i = 1, \ldots, m \\ & y_j \geq 0 & & & j = 1, \ldots, n \end{array}$$

iii) Demuestre que max α= min β (este valor se llama valor del juego).

iv) Considere el juego del emparejamieno; cada jugador elige cara o cruz. Luego se muestran las elecciones. Si las elecciones se corresponden, X gana 1 unidad a Y, si no Y gana 1 unidad a X. Encuentre el valor del juego y las estrategias mixtas optimales.

P4. Considere un problema PL de maximización con todas las restricciones del tipo "menor o igual ($\leq$)" tal que la tabla óptima del Simplex es:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{z}$
0	0	1/4	1/4	0	5
0	1	1/2	-1/2	0	2
1	0	-1/8	3/8	0	3/2
0	0	1	-2	1	4

donde x_3, x_4, x_5 son variables de holgura. Supongamos que se ha decidido incrementar el lado derecho de una de las restricciones. ¿Cuál recomendaría Ud. para ello y por qué? ¿Cuál es el mayor incremento posible en ese caso? Encontrar el correspondiente nuevo valor óptimo de la función objetivo.

P5. Considere:

$$(P) \;\; \text{máx} \;\; 9x_2 + x_3 - 2x_5 - x_6$$

$$\begin{aligned} 5x_2 + 50x_3 + x_4 + x_5 &= 10 \\ x_1 - 15x_2 + 2x_3 &= 2 \\ x_2 + x_3 + x_5 + x_6 &= 6 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 &\geq 0 \end{aligned}$$

a) Escriba el problema dual (D) correspondiente.

b) Resuelva (P) e indique la solución de (D) (o viceversa).

c) Resuelva (P), pero suponiendo que el coeficiente de x_5 en la función objetivo es $c_5 = 1$ (en lugar de -2).

d) Suponga que al problema (P) (original) se le modifica el recurso b_1 de manera que $b_1 = 10\alpha$ ¿Para que valores de α la base óptima no cambia ?.

e) ¿Qué sucede si al problema (P) se le agrega la variable x_7, con costo $c_7 = 1$ y vector columna $(0, -1, 0)^t$?.

f) ¿Que sucede si a (P) se le agrega la restricción $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \leq \beta$? Analice en función de β.

P6. Considere el siguiente problema (P)

$$(P) \;\; \text{mín} \;\; -2x_1 + x_2 - x_3$$

$$
\begin{array}{rcl}
x_1+x_2+x_3 & \leq & 6 \\
-x_1+2x_2 & \leq & 4 \\
x_1,x_2,x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

a) Resuelva (P) por el método simplex, dando además la solución del problema dual.

b) Suponga que los costos $c_2 = 1$ y $c_3 = -1$ se modifican a $\bar{c}_2 = -8$ y $\bar{c}_3 = 10$ Determine si la base óptima cambia. Encuentre una nueva solución de los problemas Primal y Dual.

c) Repita lo mismo de la parte anterior con $\bar{c}_2 = -3$ y $\bar{c}_3 = 1$.

d) Suponga que el lado derecho de (P) se modifica a $\bar{b}^t = (3,-4)$. Determine si la base óptima cambia. Encuentre la nueva solución óptima de los problemas Primal y Dual.

e) Suponga que en (P), la segunda columna de la matriz A (es decir, ${a_2}^t = (1,2)$) se cambia por $\bar{a2}^t = (2,5)$. Determine si la base óptima cambia. Encuentre la nueva solución óptima de los problemas Primal y Dual.

P7. Considere el problema de Programación Lineal:

$$
\begin{array}{rccccccc}
(P)\,\text{mín} & x_1 & -2x_2 & -4x_3 & & +2x_4 & & \\
 & x_1 & & -2x_3 & & +x_4 & = & 4 \\
 & x_1 & +x_2 & +x_3 & & -x_4 & = & 8 \\
 & & & & & x_1,x_2,x_3,x_4 & \geq & 0
\end{array}
$$

a) Imponiendo simultáneamente que la variable x_1 pertenece a la base y la variable x_3 está fuera de ella, encuentre una solución básica factible del problema.

b) A partir de la base obtenida en (a), resuelva (P) usando la Fase II del algoritmo Simplex.

c) Determine la solución óptima del problema dual de (P).

d) Si se agrega la restricción: $x_1+x_2+x_3 \leq 5$ al problema (P), determine la nueva solucion óptima o justifique por qué no existe.

e) Determine la región de los recursos (coeficientes del lado derecho del sistema) para la cual la base encontrada en (b) es óptima para (P).

f) Determine el rango de variación del costo de x_1 de manera que la base óptima encontrada en (b) no cambie.

Capítulo 5

Modelos y alg. para flujos en redes

5.1. Problemas de transporte y de flujo a costo mínimo

5.1.1. Problemas Resueltos

P1. Considere la siguiente tabla de un problema de transporte:

	1	2	3	4	a_i
1	$\boxed{9}$ 4	$\boxed{8}$ 14	$\boxed{12}$	$\boxed{13}$	18
2	$\boxed{10}$	$\boxed{10}$	$\boxed{12}$ 24	$\boxed{14}$	24
3	$\boxed{8}$ 2	$\boxed{9}$	$\boxed{11}$ 4	$\boxed{12}$	6
4	$\boxed{10}$	$\boxed{10}$	$\boxed{11}$ 7	$\boxed{12}$ 5	12
b_j	6	14	35	5	

c_{ij} x_{ij}

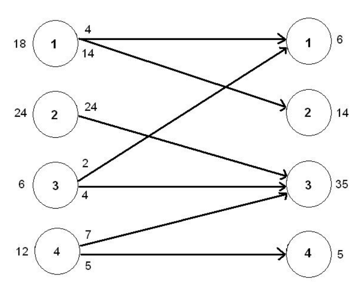
a) ¿Es básica la solución?

b) Muestre que la solución es óptima.

c) Escriba el problema de programación lineal y su dual.

Solución:

a) La solución es la siguiente:



Como es un árbol, la solución es básica.

b) Fijando arbitrariamente $u_1 = 0$ se obtienen los siguientes valores para las variables duales:

$$\begin{array}{rcl} u_1 & = & 0 \\ v_1 & = & 9 \\ v_2 & = & 8 \\ u_3 & = & -1 \\ v_3 & = & 12 \\ u_2 & = & 0 \\ u_4 & = & -1 \\ v_4 & = & 13 \end{array}$$

De esta forma los costos reducidos para las variables no-básicas son:

$$\begin{array}{rcl} \overline{c_{13}} & = & 0 \\ \overline{c_{14}} & = & 0 \\ \overline{c_{21}} & = & 1 \\ \overline{c_{22}} & = & 2 \\ \overline{c_{24}} & = & 1 \\ \overline{c_{32}} & = & 2 \\ \overline{c_{34}} & = & 0 \\ \overline{c_{41}} & = & 2 \\ \overline{c_{42}} & = & 3 \end{array}$$

Como no hay costos reducidos negativos, la solución básica es óptima.

c) El problema de programación lineal es:

$$(\mathcal{P}) \left\{ \begin{array}{ll} \min & 9x_{11}+8x_{12}+12x_{13}+13x_{14}+10x_{21}+10x_{22}+12x_{23}+14x_{24} \\ & +8x_{31}+9x_{32}+11x_{33}+12x_{34}+10x_{41}+10x_{42}+11x_{43}+12x_{44} \\ & \\ \text{s.a.} & x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=18 \\ & x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=24 \\ & x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=6 \\ & x_{41}+x_{42}+x_{43}+x_{44}=12 \\ & x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}=6 \\ & x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42}=14 \\ & x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43}=35 \\ & x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{44}=5 \\ & x_{ij} \geq 0 \end{array} \right.$$

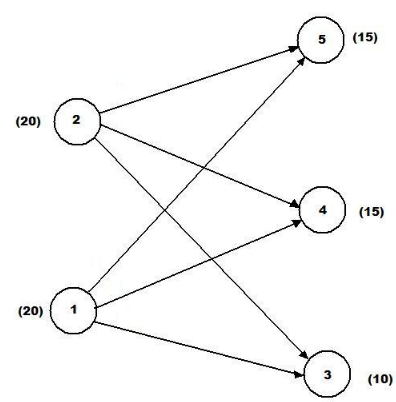
El dual de este problema es:

$$(\mathcal{D})\begin{cases} \max & 18u_1+24u_2+6u_3+12u_4+6v_1+14v_2+35v_3+5v_4 \\ \text{s.a.} & u_1+v_1 \leq 9 \\ & u_1+v_2 \leq 8 \\ & u_1+v_3 \leq 12 \\ & u_1+v_4 \leq 13 \\ & u_2+v_1 \leq 10 \\ & u_2+v_2 \leq 10 \\ & u_2+v_3 \leq 12 \\ & u_2+v_4 \leq 14 \\ & u_3+v_1 \leq 8 \\ & u_3+v_2 \leq 9 \\ & u_3+v_3 \leq 11 \\ & u_3+v_4 \leq 12 \\ & u_4+v_1 \leq 10 \\ & u_4+v_2 \leq 10 \\ & u_4+v_3 \leq 11 \\ & u_4+v_4 \leq 12 \end{cases}$$

Lo que es lo mismo:

$$(\mathcal{D})\begin{cases} \max & \sum_{i=1}^{n} a_i u_i + \sum_{j=1}^{m} b_j v_j \\ \text{s.a.} & u_i + v_j \leq c_{ij} \end{cases}$$

P2. Resolver el problema de flujo a costo mínimo de la figura donde los costos son



$$c_{13}=8 \quad c_{14}=9 \quad c_{15}=6 \quad c_{23}=20 \quad c_{24}=11 \quad c_{25}=10$$

Solución:

Buscamos una base factible, para ello saturamos el arco de menor costo, en este caso el arco (1,5), como aún queda oferta en el nodo (1) enviamos los 5 elementos restantes al siguiente arco de menor costo que es el arco (1,3). como ya no queda oferta que distribuir en el nodo 1 pasamos al nodo 2 y procedemos similarmente y obtenemos la siguiente base factible

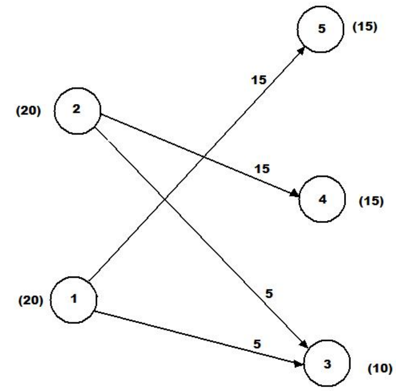


Figura 5.1: base factible inicial

Sea ahora u_1, u_2, v_3, v_4 y v_5 la variables duales, luego imponiendo que los costos reducidos de las variables básicas son 0 obtenemos el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} 8 &= u_1 + v_3 \\ 6 &= u_1 + v_5 \\ 20 &= u_2 + v_3 \\ 11 &= u_2 + v_4 \end{aligned}$$

fijando $u_1 = 0$ obtenemos que $u_2 = 12$, $v_3 = 8$, $v_4 = -1$ y $v_5 = 6$. Luego los costos reducidos de las variables no básicas son $\bar{c}_{14} = 10$ y $\bar{c}_{25} = -8$. Como $\bar{c}_{25} < 0$ hacemos ingresar a la base al arco (2,5), con $x_{25} = \lambda \in (0, 20]$ como en la figura

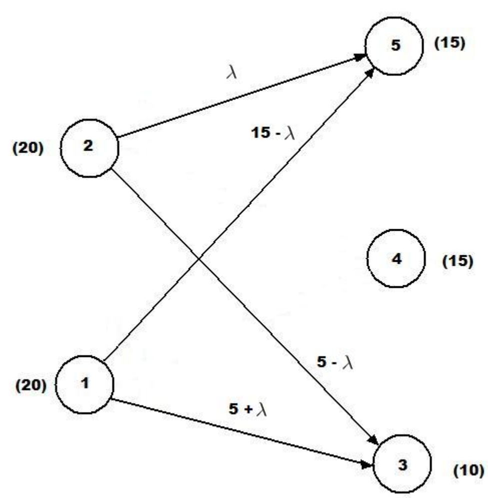


Figura 5.2: ingresa nuevo arco a la base

Se escoge el mayor λ que satisface

$$\left.\begin{array}{c} 15-\lambda \geq 0 \\ 5-\lambda \geq 0 \\ 5+\lambda \geq 0 \\ \lambda \geq 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \lambda = 5$$

Luego el arco (2,3) sale de la base, e iteramos nuevamente calculando las variables duales, el sistema para ellas es

$$\begin{aligned} 8 &= u_1 + v_3 \\ 6 &= u_1 + v_5 \\ 11 &= u_2 + v_4 \\ 10 &= u_2 + v_5 \end{aligned}$$

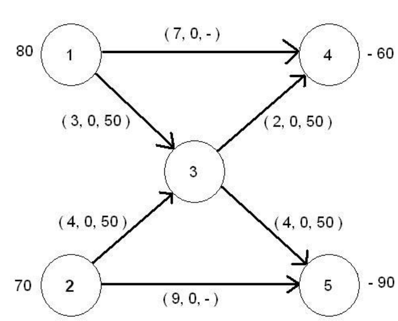
fijando $u_1 = 0$ obtenemos que $u_2 = 4$, $v_3 = 8$, $v_4 = 7$ y $v_5 = 6$. Luego los costos reducidos de las variables no básicas son $\bar{c}_{14} = 2$ y $\bar{c}_{23} = 8$. Como todos los costos reducidos son mayores o iguales a 0, estamos en el óptimo.

P3. Una compañía produce el mismo producto X en dos fábricas, **1** y **2**. El producto se debe enviar a dos centros de demanda **A** y **B**. La fábrica **1** puede enviar un número ilimitado del producto a **A** y nada del producto a **B**. La fábrica **2** sólo puede enviar unidades a **B**, ilimitadamente. Además se puede enviar a lo más 50 unidades independientemente desde ambas fábricas a un centro de distribución desde el cual se pueden enviar 50 unidades a lo más a cada centro de demanda. Los costos, oferta y demanda se resumen en la siguiente tabla.

Desde \ Hacia	C. Dist.	A	B	Oferta
Fábrica 1	3	7	-	80
Fábrica 2	4	-	9	70
C. Dist.		2	4	
Demanda		60	90	

Solución:

El problema corresponde al siguiente flujo:



Se elige la siguiente base inicial:

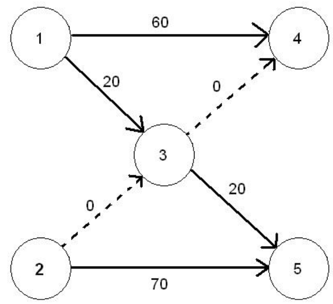


Figura 5.3: Base Inicial

Eligiendo arbitrariamente $\pi_3 = 0$ y usando que para los arcos de la base

$$\overline{c_{ij}} = c_{ij} - \pi i + \pi j$$

Se obtienen los siguientes valores para las variables duales:

$$\begin{aligned} \pi_1 &= 3 \\ \pi_4 &= -4 \\ \pi_5 &= -4 \\ \pi_2 &= 5 \end{aligned}$$

Los costos reducidos para las variables no básicas son:

$$\begin{aligned} \overline{c_{23}} &= -1 \\ \overline{c_{34}} &= -2 \end{aligned}$$

Ambas variables se encuentran en su cota inferior 0 por lo que se elige arbitrariamente x_{34} para ingresar a la base.

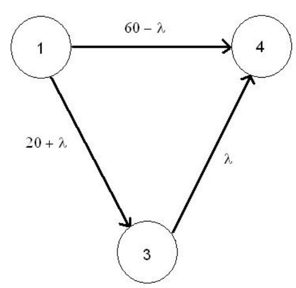


Figura 5.4: Primera Iteración

Las restricciones para la cantidad transportada λ son:

$$\begin{array}{rcl} & 60-\lambda & \geq 0 \\ 50 \geq & 20+\lambda & \geq 0 \\ 50 \geq & \lambda & \geq 0 \end{array}$$

Se obtiene $\lambda = 30$ y sale de la base la variable x_{13} que se encuentra en su cota superior. Se obtiene la siguiente base:

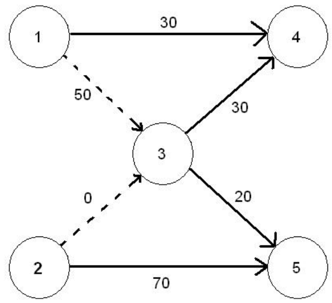


Figura 5.5: Primera Iteración

Eligiendo arbitrariamente $\pi_3 = 0$ los valores de las variables duales son:

$$\begin{aligned} \pi_4 &= -2 \\ \pi_1 &= 5 \\ \pi_5 &= -4 \\ \pi_2 &= 5 \end{aligned}$$

Los costos reducidos para las variables no básicas son:

$$\begin{aligned} \overline{c_{13}} &= -2 \\ \overline{c_{23}} &= -1 \end{aligned}$$

Ambos costos reducidos son negativos, sin embargo la variable x_{13} se encuentra en su cota superior mientras que x_{23} se encuentra en su cota inferior. Por lo tanto x_{23} ingresa a la base.

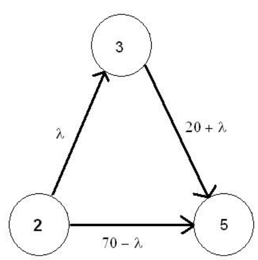


Figura 5.6: Segunda Iteración

Las restricciones para la cantidad transportada λ son:

$$\begin{array}{rcl} 50 \geq & \lambda & \geq 0 \\ 50 \geq & 20+\lambda & \geq 0 \\ & 70-\lambda & \geq 0 \end{array}$$

Se obtiene $\lambda = 30$ y la variable x_{35} (que se encuentra en su cota superior) sale de la base.

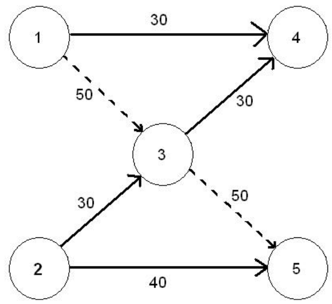


Figura 5.7: Segunda iteración

Eligiendo arbitrariamente $\pi_3 = 0$ los valores de las variables duales son:

$$\begin{aligned}\pi_4 &= -2\\ \pi_1 &= 5\\ \pi_2 &= 4\\ \pi_5 &= -5\end{aligned}$$

Los costos reducidos para las variables no básicas son:

$$\begin{aligned}\overline{c_{13}} &= -2\\ \overline{c_{35}} &= -1\end{aligned}$$

Como ambas variables se encuentran en sus cotas superiores, se cumple el criterio de optimalidad y la base obtenida es solución.

P4. Resolver el problema de transporte, usando los datos:

$$a = \begin{pmatrix}70\\50\\40\end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix}60\\30\\30\\30\end{pmatrix} \quad C = \begin{bmatrix}3 & 6 & 8 & 14\\ 2 & 7 & 3 & 11\\ 12 & 3 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

Solución:

Primero, notando que:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i < \sum_{i=1}^{n} b_i$$

Se agrega un nodo auxiliar de demanda, con demanda 10 y con costos de transporte 0 entre cualquier nodo de oferta y este nodo auxiliar (nodo sumidero). Usando el criterio de saturación por costo mínimo se obtiene la siguiente base inicial.

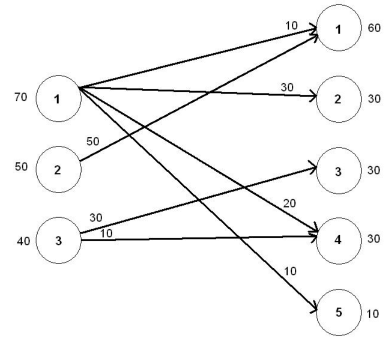


Figura 5.8: Base inicial

Se elige arbitrariamente $u_1 = 0$ y usando que para las variables de la base:

$$\overline{c_{ij}} = c_{ij} - u_i - v_j = 0$$

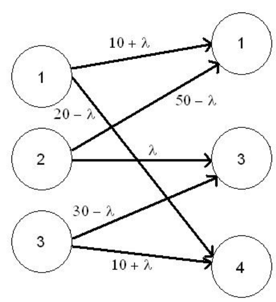
Se obtienen los siguientes valores para las variables duales:

$$\begin{array}{rclrcl} v_1 & = & 3 & v_2 & = & 6 \\ v_4 & = & 14 & v_5 & = & 0 \\ u_2 & = & -1 & u_3 & = & -13 \\ v_3 & = & 14 & & & \end{array}$$

Los costos reducidos para las variables no básicas son:

$$\begin{array}{rclrcl} \overline{c_{13}} & = & -6 & \overline{c_{22}} & = & 2 \\ \overline{c_{23}} & = & -10 & \overline{c_{24}} & = & -2 \\ \overline{c_{25}} & = & 0 & \overline{c_{31}} & = & 22 \\ \overline{c_{32}} & = & 10 & \overline{c_{35}} & = & 13 \end{array}$$

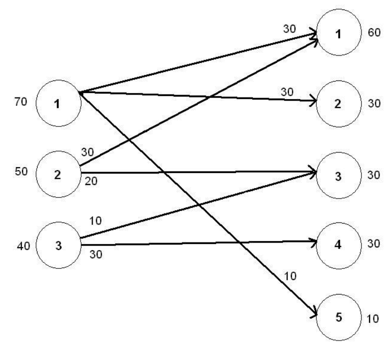
Se elige x_{23} para ingresar a la base:



Las restricciones para la cantidad transportada λ son:

$$\begin{array}{rl} 10+\lambda & \geq 0 \\ 50-\lambda & \geq 0 \\ \lambda & \geq 0 \\ 30-\lambda & \geq 0 \\ 10+\lambda & \geq 0 \\ 20-\lambda & \geq 0 \end{array}$$

Por lo tanto $\lambda = 20$ y se tiene la base:



Se obtienen los siguientes valores para las variables duales:

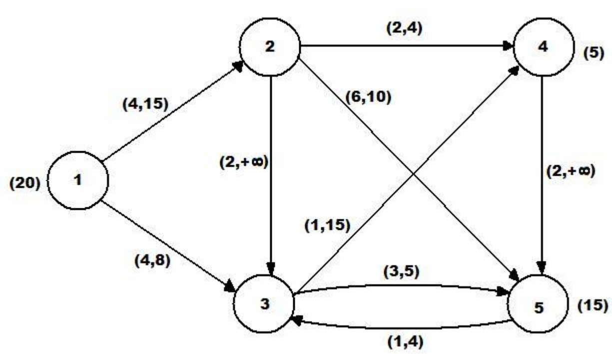
$$\begin{aligned} u_1 &= 0 \\ v_1 &= 3 \\ v_2 &= 6 \\ v_5 &= 0 \\ u_2 &= -1 \\ v_3 &= 4 \\ u_3 &= -3 \\ v_4 &= 4 \end{aligned}$$

Los costos reducidos para las variables no básicas son:

$$\begin{aligned} \overline{c_{13}} &= 4 & \overline{c_{14}} &= 10 \\ \overline{c_{22}} &= 2 & \overline{c_{24}} &= 8 \\ \overline{c_{25}} &= 1 & \overline{c_{31}} &= 12 \\ \overline{c_{32}} &= 0 & \overline{c_{35}} &= 3 \end{aligned}$$

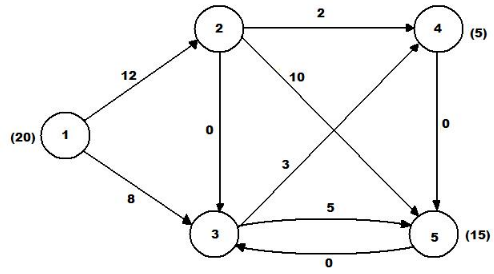
Por lo tanto la base es la solución del problema.

P5. Resuelva el siguiente problema de flujo al costo mínimo sobre el siguiente grafo:



donde las cota inferior de todos los arcos es 0, y los datos del grafo están dados en la forma (c_{ij}, u_{ij}) con u_{ij} es la cota superior del arco (i,j).

Indicación: Considere la siguiente solución básica inicial



con arbol generador

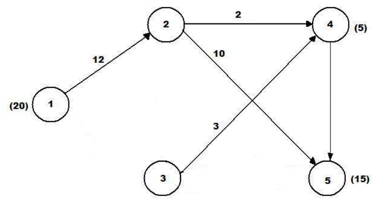


Figura 5.9: árbol generador

Solución:

Calculamos las variables duales (π_i) apoyándonos en el hecho que los costos reducidos de las variables básicas son nulos, luego tenemos

$$\begin{aligned} 4 &= \pi_1 - \pi_2 \\ 2 &= \pi_2 - \pi_4 \\ 6 &= \pi_2 - \pi_5 \\ 1 &= \pi_3 - \pi_4 \end{aligned}$$

Fijando $\pi_2 = 0$ obtenemos $\pi_1 = 4$, $\pi_4 = -2$, $\pi_5 = -6$ y $\pi_3 = -1$. Por lo tanto los costos reducidos de las variables no básicas son

$$\begin{aligned} &\bar{c}_{23} = 1 \quad \text{(cota inferior)} \\ &\bar{c}_{45} = -2 \quad \text{(cota inferior)} \\ &\bar{c}_{53} = 6 \quad \text{(cota inferior)} \\ &\bar{c}_{13} = 1 \quad \text{(cota superior)} \\ &\bar{c}_{35} = 2 \quad \text{(cota superior)} \end{aligned}$$

Como $\bar{c}_{45} < 0$ no estamos en el óptimo, luego hacemos que el arco (4,5) entre a la base, con $x_{45} = \lambda$ como en la figura 5.10, donde λ es tal que

$$\left.\begin{array}{c} 2+\lambda \leq 4 \\ 10-\lambda \geq 0 \\ \lambda \geq 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \lambda = 2$$

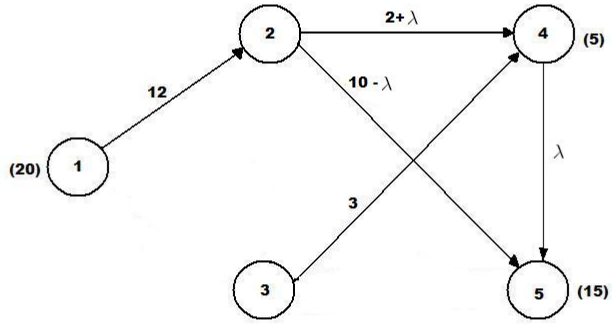


Figura 5.10: ingreso a la base del arco (4,5)

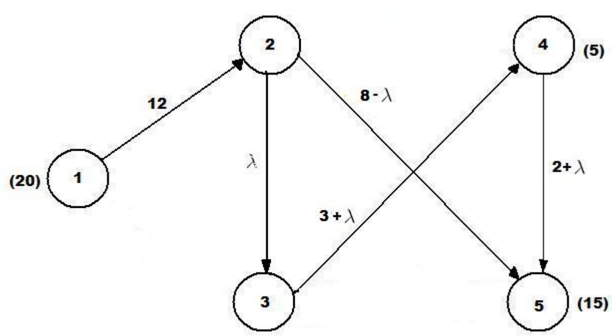
por lo tanto el arco (2,4) sale de la base. Luego volvemos a iterar calculando las variables duales

$$
\begin{aligned}
4 &= \pi_1 - \pi_2 \\
6 &= \pi_2 - \pi_5 \\
1 &= \pi_3 - \pi_4 \\
2 &= \pi_4 - \pi_5
\end{aligned}
$$

Fijando $\pi_2 = 0$ obtenemos $\pi_1 = 4$, $\pi_3 = -3$, $\pi_4 = -4$ y $\pi_5 = -6$. Por lo tanto los costos reducidos de las variables no básicas son

$$
\begin{aligned}
&\bar{c}_{23} = -1 \quad \text{(cota inferior)} \\
&\bar{c}_{53} = 4 \quad \text{(cota inferior)} \\
&\bar{c}_{13} = 3 \quad \text{(cota superior)} \\
&\bar{c}_{24} = 2 \quad \text{(cota superior)} \\
&\bar{c}_{35} = 0 \quad \text{(cota superior)}
\end{aligned}
$$

Como $\bar{c}_{23} < 0$ no estamos en el óptimo, luego hacemos que el arco (2,3) entre a la base, con $x_{23} = \lambda$ como en la figura



donde λ es tal que

$$\left.\begin{array}{c} 3+\lambda \leq 12 \\ 8-\lambda \geq 0 \\ \lambda \geq 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \lambda = 8$$

por lo tanto el arco (2,5) sale de la base. Luego volvemos a iterar calculando las variables duales

$$4 = \pi_1 - \pi_2 \qquad\qquad 2 = \pi_2 - \pi_3$$
$$1 = \pi_3 - \pi_4 \qquad\qquad 2 = \pi_4 - \pi_5$$

Fijando $\pi_2 = 0$ obtenemos $\pi_1 = 4$, $\pi_3 = -2$, $\pi_4 = -3$ y $\pi_5 = -5$. Por lo tanto los costos reducidos de las variables no básicas son

$\bar{c}_{25} = 1$ (cota inferior) $\qquad$ $\bar{c}_{53} = 4$ (cota inferior)

$\bar{c}_{13} = 2$ (cota superior) $\qquad$ $\bar{c}_{24} = 1$ (cota superior)

$\bar{c}_{35} = 0$ (cota superior)

Luego como todos los costos reducidos son positivos estamos en el óptimo.

P6. Considere tres centros de oferta de un cierto producto, con ofertas respectivas de 5, 25 y 25 unidades, y tres centros de demanda, con demandas 10, 20 y 15 respectivamente.
Suponga que la matriz de costos unitarios es:

$$(c_{ij}) = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

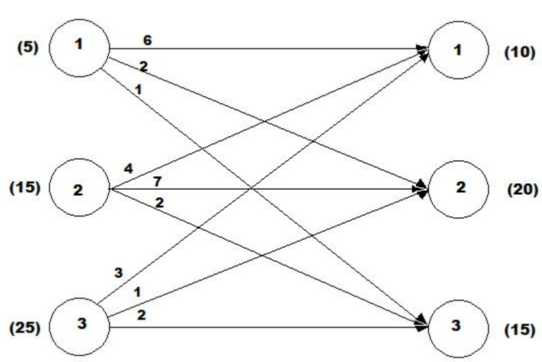
a) Haga un bosquejo de el problema, planteelo como problema de transporte.

b) Encuentre una solución básica factible.

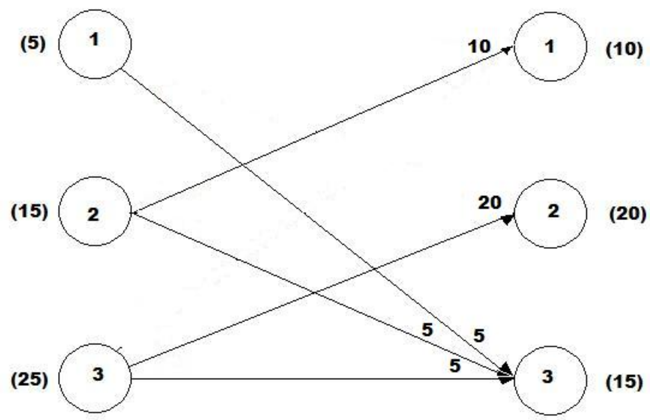
c) Encuentre una solución óptima y diga si es única.

Solución:

a) El problema gráficamente es



b) Dado el grafo anterior procedemos saturando los arcos de menor costo, luego la base factible es



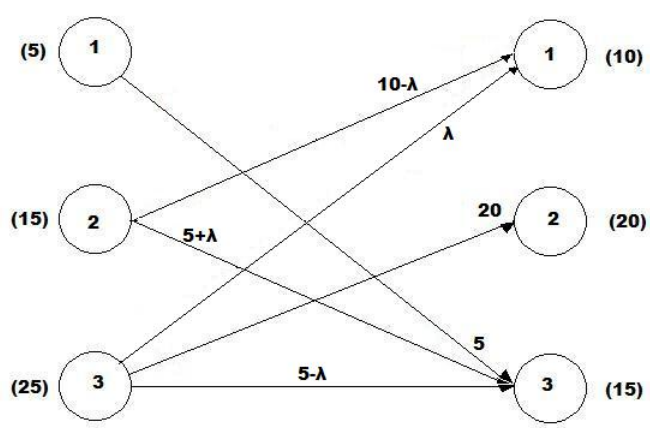
c) Luego calculamos las variables duales, recordando que los costos reducidos son nulos para las variables básicas.

$$
\begin{aligned}
1 &= u_1 + v_3 & \qquad 4 &= u_2 + v_1 \\
2 &= u_2 + v_3 & \qquad 1 &= u_3 + v_2 \\
2 &= u_3 + v_3 & &
\end{aligned}
$$

fijando $u_2 = 0$ obtenemos $u_1 = -1$, $u_3 = 0$, $v_1 = 4$, $v_2 = 1$ y $v_3 = 2$. Luego los costos reducidos de las variables no básicas son

$$
\begin{aligned}
\bar{c}_{11} &= 3 & \qquad \bar{c}_{12} &= 2 \\
\bar{c}_{22} &= 6 & \qquad \bar{c}_{31} &= -1
\end{aligned}
$$

Como $\bar{c}_{31} < 0$ hacemos que el arco (3,1) entre a la base con flujo $x_{31} = \lambda$



donde λ cumple

$$
\left.\begin{array}{r} 10 - \lambda \geq 0 \\ 5 - \lambda \geq 0 \\ \lambda \geq 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \lambda = 5
$$

Luego el arco (3,3) sale de la base y volvemos a calcular los costos reducidos de los nuevos arcos básicos

$$1 = u_1 + v_3$$
$$4 = u_2 + v_1$$
$$2 = u_2 + v_3$$
$$3 = u_3 + v_1$$
$$1 = u_3 + v_2$$

fijando $u_1 = 0$ obtenemos $u_2 = 1$, $u_3 = 0$, $v_1 = 3$, $v_2 = 1$ y $v_3 = 1$. Luego los costos reducidos de las variables no básicas son

$$\bar{c}_{11} = 3$$
$$\bar{c}_{12} = 1$$
$$\bar{c}_{22} = 5$$
$$\bar{c}_{31} = 1$$

Luego como todos los costos reducidos son positivos, estamos en el óptimo.

5.1.2. Problemas Propuestos

P1. Una empresa de arriendo de autos, debe satisfacer la demanda de cuatro ciudades en un cierto día:

Ciudad	Autos demandados
A	2
B	3
C	5
D	7

La empresa tiene 3 garages donde guarda sus 18 autos:

Garage	Autos disponibles
1	6
2	2
3	10

Las distancias entre los garages y las ciudades están dadas por la tabla:

Gar. \ Ciu.	A	B	C	D
1	7	11	3	2
2	1	6	0	1
3	9	15	8	5

Encuentre una asignación de los automóviles a las diferentes ciudades, de manera de minimizar la distancia total recorrida.

P2. Sea un distribuidor de computadores que tiene dos bodegas con ofertas diarias de 50 unidades cada una, y demandas diarias de 30, 20, 20 y 20 unidades respectivamente en 4 ciudades. Los costos unitarios de transporte son:

	d_1	d_2	d_3	d_4
o_1	1	2	4	1
o_2	1	3	5	2

a) Plantee el problema como uno de transporte.

b) Entregar una solución básica factible inicial.

c) Diga si su solución es óptima. Si no, itere una vez más para obtener una nueva solución.

d) Evalúe la función objetivo del problema dual (en la solución en curso) y entregue un intervalo de certeza para el valor óptimo del primal.

P3. **(a)** Plantee y resuelva el siguiente problema: se tiene 2 oferentes,con ofertas

$$a_1 = 20$$

$$a_2 = 25$$

y 3 demandantes, con demandas

$$b_1 = 7$$

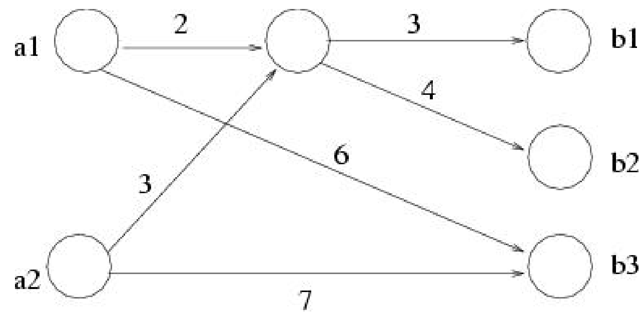
$$b_2 = 23$$

$$b_3 = 12$$

Los costos de transporte están dados por la tabla siguiente:

	b_1	b_2	b_3
a_1	5	3	7
a_2	2	8	6

(b) Suponga ahora que existe un nodo de **transbordo** (es decir, no demanda ni ofrece), según el grafo (los costos, sobre los arcos) y resuelva.



P4. Considere un par de nodos-origen que tienen ofertas de $a_1 = 100$ y $a_2 = 200$ unidades respectivamente, y dos nodos-destino que tienen demandas $b_3 = b_4 = 150$ (luego, tienen una oferta de -150). Considere además un nodo de trasbordo (sin oferta ni demanda) al cual los nodos-origen *pueden* también enviar producto. Si denominamos 1 y 2 a los nodos-origen, 3 y 4 a los nodos-destino, y 0 al nodo de trasbordo, los costos son los siguientes:

$$c_{13} = 1, \quad c_{10} = 20, \quad c_{14} = 30, \quad c_{03} = 4, \quad c_{04} = 10, \quad c_{20} = 6, \quad c_{24} = 8$$

Los demás arcos no existen. Los arcos $(1,3)$ y $(2,4)$ tienen cota superior igual a 100.

a) Dibuje el grafo de esta situación y determine una solución básica factible, explicando claramente cuáles son los arcos de base y por qué.

b) Itere hasta obtener una solución óptima y entregue un valor óptimo.

c) Calcule $\sum a_i u_i + \sum b_j v_j$ donde u_i y v_j son las variables duales en el óptimo y comente.

P5. Considere tres centros productivos O1, O2 y O3, con ofertas respectivas de 5, 25 y 25. Hay además dos centros D1 y D2, con demandas 15 y 30. Suponga que la matriz de costos unitarios de transporte es

	D1	D2
O1	9	12
O2	1	1
O3	2	2

a) Plantear este problema como uno de transporte.

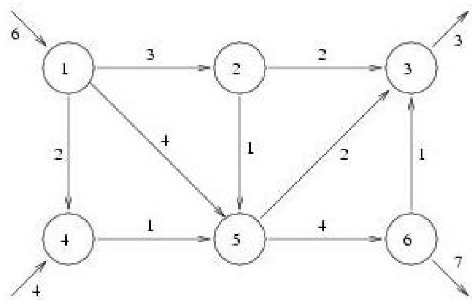
b) Encontrar una solución básica factible que contenga a los arcos (1, 1) y (1, 2).

c) Indique el valor de la función objetivo en esta solución e indique una cota inferior del valor óptimo.

d) Itere hasta encontrar una solución óptima y diga si es única (justifique).

e) Si se modifica el costo del arco (1,1) al valor 2, recalcule la (nueva) solución óptima.

P6. Considere el problema de flujo de costo mínimo correspondiente a la red de la figura. En cada arco se indica el costo unitario. Las capacidades inferiores valen todas 0 y las superiores son infinitas (los números en cada nodo son simples etiquetas, no representan ofertas ni demandas).



a) Escriba el problema como uno de programación lineal (elija con cuidado la función objetivo).

b) Determine la solución óptima utilizando el Simplex especializado a redes.