MEDIDA E INTEGRACIÓN – CONTROL 3

JAIME SAN MARTÍN & FELIPE OLMOS
10 DE JULIO DE 2008

[P1.] Considere un espacio de medida finita $(X, \mathcal{F}, \nu)$. Sea $f : X \to \mathbb{R}_+$ una función Boreliana, es decir medible cuando dotamos a $\mathbb{R}_+$ de la σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}$.

(a) (2.0) Demuestre que $G_<(f) = \{(x,t) \in X \times \mathbb{R}_+ : \ 0 < t < f(x)\}$ es $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}$-medible.

(b) (2.0) Pruebe que $G(f) = \{(x,t) \in X \times \mathbb{R}_+ : \ 0 \leq t \leq f(x)\}$ es $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}$-medible. Para ello le puede servir suponer primero que f es acotada por una constante, digamos K y considere $g = K - f$. Pruebe que si $A \subset X \times [0, K]$ es medible en $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}$ entonces el conjunto

$$B = \{(x,t) \in X \times \mathbb{R}_+ : \quad (x, K - t) \in A\},$$

también es medible. Concluya el resultado.

(c) (2.0) Demuestre que

$$\int_X f \, d\nu = \nu \otimes \lambda\,(G) = \nu \otimes \lambda\,(G_<),$$

donde λ es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$.

Nota: Lo anterior generaliza el resultado de cálculo "La integral de una función positiva es el área bajo la curva".

[P2.] Considere para cada $t > 0$ la siguiente medida de probabilidad μ_t concentrada en $\mathbb{N}$ dada por

$$\mu_t(\{k\}) = \rho(t,k) = e^{-t}\frac{t^k}{k!}.$$

Para $0 < t_1 < t_2 \cdots < t_p$ definimos la medida de probabilidad en $\mathbb{R}^p$, concentrada en el conjunto numerable $\mathbb{N}^p_< = \{(n_1, n_2, \cdots, n_p) \in \mathbb{N}^p : \quad n_1 \leq n_2 \leq \cdots \leq n_p\}$, dada por

$$\mu_{t_1,\cdots,t_p}(\{(n_1,\cdots,n_p)\}) = \prod_{j=1}^{p} \rho(t_j - t_{j-1}, n_j - n_{j-1}),$$

donde hemos tomado $n_0 = t_0 = 0$.

(a) (3.0) Demuestre que existe una única medida de probabilidad en $(\mathbb{R}^{(0,\infty)}, \mathcal{B}^{(0,\infty)})$, que denotaremos por $\mathbb{P}$, que tiene por marginales las medidas $(\mu_{t_1,\cdots,t_p} : p \geq 1, 0 < t_1 < t_2 \cdots < t_p)$, esto es si X_t denota las funciones coordenadas y $0 < t_1 < t_2 \cdots < t_p$ entonces

$$\mathbb{P}(X_{t_1} = n_1, \cdots, X_{t_p} = n_p) = \mu_{t_1,\cdots,t_p}(\{(n_1,\cdots,n_p)\}).$$

(b) (3.0) Pruebe que si $0 < u < s < t$ entonces $X_t - X_s$ es independiente de X_u y que ambos tienen distribución μ_{t-s} y μ_u respectivamente. Para esta última parte le puede ser útil darse cuenta que:

$$\mathbb{P}(X_u = l, X_t - X_s = m) = \sum_{j \geq l} \mathbb{P}(X_u = l, X_s = j, X_t - X_s = m).$$

[P3.] Sea X un espacio métrico compacto y $T : X \to X$ una función continua sobreyectiva. Para $x \in X$ y $f : X \to \mathbb{R}$ definimos :

$$S_f^N(x) = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} f(T^i(x))$$

Consideremos $\mathcal{F}$ una familia densa numerable en $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$. Sea de ahora en adelante $x \in X$ fijo :

(a) (1.0) Pruebe que existe una subsucesión $n_j \nearrow \infty$ tal que $lim_{j\to\infty} S_f^{n_j}(x)$ existe para toda $f \in \mathcal{F}$

(b) (2.0) Pruebe que para $g \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ la sucesión $(S_g^{n_j}(x))$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$ y concluya que $S_g^{\infty}(x) = lim_{j\to\infty} S_g^{n_j}(x)$ existe y define un funcional lineal continuo de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ en $\mathbb{R}$ que llamamos L_x.

(c) (3.0) Concluya que existe una medida de probabilidad μ en $(X, \beta(X))$ tal que $L_x(g) = \int g\, d\mu$ y tal que para B medible se tiene $\mu(T^{-1}(B)) = \mu(B)$.