MEDIDA E INTEGRACIÓN – CONTROL 2

JAIME SAN MARTÍN & FELIPE OLMOS

6 DE JUNIO DE 2008

P1. Considere $[0,1]^2$ dotado de la σ-álgebra $\beta([0,1])^2$ y de la medida de Lebesgue λ^2. Considere la sub-σ-álgebra :

$$\mathcal{G} = \{A \times [0,1] : A \in \beta([0,1])\}$$

(a) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función boreliana integrable. Pruebe que existe una única (ctp) función h que es $\mathcal{G}$-medible tal que :

$$\forall A \in \mathcal{G}\,,\ \int_A f \, d\lambda^2 = \int_A h \, d\lambda^2$$

(b) Encuentre h explícitamente en función de f

(c) Definimos $E : L^p(\beta([0,1])^2) \to L^p(\mathcal{G})$ la función que a cada $f \in L^p(\beta([0,1]^2)$ le asocia el único h descrito en (a). Explique porque E está bien definida y pruebe que es lineal, continua y de norma 1.

P2. Recordemos que una función entre espacios métricos (E,d) y (F,d') se dice *uniformemente continua* si satisface:

$$\forall \varepsilon > 0\,, \exists \delta > 0\,, \forall x, y \in E\,,\ d(x,y) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

Consideramos el espacio de medida $(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}^d, dy)$ y funciones de $\mathbb{R}^d$ en $\mathbb{R}$:

(a) Sea $f \in L^\infty$ una función que posee un representante uniformemente continuo pruebe que la aplicación $h \to \tau_h f$ que va desde $\mathbb{R}^d$ a L^∞ es continua.

(b) Nos proponemos demostrar una recíproca para (a), suponga de ahora en adelante que $f \in L^\infty$ y que la aplicación $h \to \tau_h f$ es continua.

Demuestre que $dx \otimes dy$-ctp en $\mathbb{R}^{2d}$ se satisface :

$$|f(x) - \tau_y f(x)| \le \|f - \tau_y f\|_\infty$$

Se entiende que la $\|\cdot\|_\infty$ anterior es tomada en la variable x.

(c) Sea ρ_ε el regularizador de aproximación $\varepsilon > 0$. Pruebe que la función $f * \rho_\varepsilon$ está definida en todo punto de $\mathbb{R}^d$, que es acotada y uniformemente continua.

(d) Pruebe que :

$$\|f - f * \rho_\varepsilon\|_\infty \le \int \|f - \tau_{-y} f\|_\infty \rho_\varepsilon(y)\, dy$$

y que :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|f - f * \rho_\varepsilon\|_\infty = 0$$

Concluya el resultado probando usando la siguiente propiedad (que debe demostrar).

(e) Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en L^∞ convergente. Suponga que para cada $n \in \mathbb{N}$ f_n posee un representante uniformemente continuo. Demuestre que el límite posee un representante uniformemente continuo.

HINT: Puede serle útil recordar que que el espacio de funciones continuas acotadas $BC(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ dotado de la norma del supremo es Banach.