MEDIDA E INTEGRACIÓN – CONTROL 1

JAIME SAN MARTÍN & FELIPE OLMOS

30 DE ABRIL DE 2008

P1. Sea S el conjunto de todas las sucesiones de números reales indizadas por $\mathbb{N}$. Consideremos los subconjuntos de S dados por

$$\begin{aligned} \ell^p &= \{(a_n) \in S : \textstyle\sum_n |a_n|^p < \infty\} \text{ para } p \in [1,\infty) \\ \ell^\infty &= \{(a_n) \in S : \text{máx}_n |a_n| < \infty\} \\ \ell_0 &= \{(a_n) \in S : \text{lím}_{n\to\infty} a_n = 0\} \end{aligned}$$

Como es usual denotamos por $\|(a_n)\|_p = (\sum_n |a_n|^p)^{1/p}$ para $p \in [1,\infty)$ y $\|(a_n)\|_\infty = \text{máx}_n |a_n|$. Notemos que $\ell^p = L^p(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ para $p \geq 1$, donde μ es la medida σ-finita de cuenta puntos en $\mathbb{N}$.

- Pruebe que $\ell^p \subsetneq \ell_0 \subsetneq \ell^\infty$ para $p \in [1,\infty)$
- Estudie la densidad de ℓ^p en ℓ_0 y pruebe que este último es cerrado en ℓ^∞.
- Considere $e(n) \in \ell_0$ la secuencia que consta de ceros salvo un uno en la posición n. Demuestre que las combinaciones lineales finitas de $\{e(n) : n \in \mathbb{N}\}$ son densas en ℓ_0 (con la topología de ℓ^∞) y en ℓ^p, $p \in [1,\infty)$. ¿Qué sucede para ℓ^∞?
- Para esta parte supondremos $p \in [1,\infty)$ fijo. Consideremos una aplicación lineal $l : \ell^p \to \mathbb{R}$ continua. Recordemos que la continuidad es equivalente a la existencia de una constante $M < \infty$ tal que

  $$\forall (a_n) \in \ell^p \quad |l((a_n))| \leq M \|(a_n)\|_p.$$

  Definamos $b_n = l(e(n))$. Pruebe que

  $$l((a_n)) = \sum_n b_n a_n,$$

  y concluya que (b_n) esta en ℓ^q donde q es el conjugado de p, esto es

  $$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

  Indicación. Para $p > 1$ y $N \in \mathbb{N}$ considere la secuencia $\mathbf{a}^{(N)} \in S$

  $$\mathbf{a}^N = \begin{cases} |b_n|^{q-1} signo(b_n) & 0 \leq n \leq N \\ 0 & n > N, \end{cases}$$

  pruebe que $\mathbf{a}^{(N)} \in \ell^p$ y que $l(\mathbf{a}^{(N)}) \geq \sum_{n=0}^N |b_n|^q$.

P2. Sea $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de medida finita. Sin pérdida de generalidad se puede suponer que $\mu(X) = 1$. En particular $\mu(A^c) = 1 - \mu(A)$.

Sea $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una colección numerable de conjuntos medibles. Pruebe que

$$\sum_n \mu(A_n) < \infty \Rightarrow \mu(\overline{\lim_n} A_n) = 0.$$

Recuerde que

$$\overline{\lim_n} A_n = \lim_n \downarrow \cup_{k\geq n} A_k.$$

Para una suerte de recíproca supondremos que los conjuntos satisfacen la hipótesis extra

$$\forall k \geq 2\, \forall m_1 < \cdots < m_k \in \mathbb{N} \qquad \mu\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_{m_i}\right) = \prod_{i=1}^{k} \mu(A_{m_i}). \tag{1}$$

Pruebe entonces

- la siguiente generalización de (1)

$$\forall k \geq 2\, \forall m_1 < \cdots < m_k \in \mathbb{N} \quad \forall \xi \in \{+,-\}^k \qquad \mu\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_{m_i}^{\xi(i)}\right) = \prod_{i=1}^{k} \mu(A_{m_i}^{\xi(i)}). \tag{2}$$

  donde $A^+ = A$ y $A^- = A^c$. Use inducción en k y en $m = |\{i : \xi(i) = -\}|$.
- y la proposición

$$\sum_n \mu(A_n) = \infty \Rightarrow \mu(\overline{\lim_n}\, A_n) = 1.$$

  Indicación Le puede ser útil la desigualdad: para una familia finita de números $0 \leq x_i \leq 1$, $i = 1, \cdots, n$

$$\prod_{i=1}^{n} (1 - x_i) \leq e^{-\sum_{i=1}^{n} x_i}.$$

  Use además que los conjuntos (A_n^c) también satisfacen la propiedad (2)

P3. Sea (X, τ, μ) espacio de medida finita ($\mu(X) = 1$) y $H : X \to \mathbb{R}$ medible. Se define la función de distribución de H, denotada por $F : (-\infty, \infty) \to [0,1]$, como :

$$F(\alpha) = \mu\left(\{x \in X : H(x) \leq \alpha\}\right)$$

Demuestre que :

(a) F es creciente y continua a la derecha.

(b) para toda funcion $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, boreliana se tiene que:

$$\int_X \phi(H(x)) d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} \phi(\alpha)\, d\mu_F(\alpha)$$

Donde μ_F es la medida de Lebesgue-Stieltjes asociada a F.

TIEMPO 3 hrs.

SOLO LOS MAS CURIOSOS, PARA LA CASA. Sean X, Y dos conjuntos no vacios y S, R dos semi-álgebras en X e Y respectivamente. Considere la colección de conjuntos $S \otimes R = \{A \times B : A \in S, B \in R\}$. Pruebe que $S \otimes R$ es una semi-álgebra en $X \times Y$.

En el caso especial de $X = Y = \mathbb{R}$ y $S = R = S(\mathbb{R})$ denotaremos por $S^2 = S(\mathbb{R}) \otimes S(\mathbb{R})$.

- Pruebe que si $B = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| < 1\}$ entonces existe una familia numerable $(A_n) \subset S^2$ tal qu $B = \bigcup_n A_n$. ¿Es posible escoger (A_n) disjuntos?. ¿Es posible hacer lo mismo con $\bar{B} = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leq 1\}$?.
- Pruebe que $S^2 \subset \mathcal{B}$ y que $\mathcal{B} = \sigma(S^2)$, donde $\mathcal{B}$ es la σ-álgebra Boreliana de $\mathbb{R}^2$.