# CONTROL 1

Abril 20, 2002

Prof. Jaime San Martín

Aux. Ricardo Menares

**Pregunta 1:** Consideremos la medida $\mathcal{H}^2$ de Haussdorf dos dimensional en $\mathbb{R}^2$ ( no pruebe que es medida). El propósito de esta pregunta es probar que ella coincide con la medida de Lebesgue salvo una constante multiplicativa.

(i) Pruebe que $S = \{(a,b] \times (c,d] \cap \mathbb{R}^2 : \ a \leq b, c \leq d \in \bar{\mathbb{R}}\}$ es una semiálgebra que genera los borelianos de $\mathbb{R}^2$.

Se define la medida de un rectángulo $\mu((a,b] \times (c,d]) = (b-a)(d-c)$.

(ii) Pruebe por inducción que si un rectángulo es unión finita disjunta de rectángulos entonces la medida es la suma de las medidas.

(iii) Pruebe que $\mu$ es una medida en $S$. Para probar la $\sigma$-aditividad si $\cup_{i \in \mathbb{N}} R_i = R$ con $R_i \in S$, disjuntos y $R \in S$, tomar un subrectángulo compacto de $R$ y engrosar los $R_i$ de manera que queden abiertos. Concluya que existe una única medida extensión de $\mu$ a los borelianos de $\mathbb{R}^2$ y que para todo boreliano

$$\mu(A+x) = \mu(A), \ \ \mu(kA) = k^2 \mu(A),$$

donde $A + x = \{y + x : \ y \in A\}$ y $kA = \{ky : \ y \in A\}$.

(iv) Pruebe que $\mathcal{H}^2(R) = \mathcal{H}^2([0,1] \times [0,1])\mu(R)$ para cualquier cuadrado $R$ y por lo tanto para cualquier rectángulo de extremos racionales y concluya que la igualdad se tiene para cualquier rectángulo. Debe probar que $\mathcal{H}^2([0,1] \times [0,1])$ es finita y estrictamente positiva. Concluya que para todo boreliano $A$ se tiene

$$\mathcal{H}^2(A) = \mathcal{H}^2([0,1] \times [0,1])\mu(A).$$

**Pregunta 2:**

I Supongamos $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función que verifica

$$\forall x \in \mathbb{R} \ f(x, \bullet) \text{ es de clase } C^1$$
$$\forall t \in \mathbb{R} \ f(\bullet, t) \in L^1(\mathbb{R}, dx).$$

Además supongamos que existe $g \in L^1(\mathbb{R}, dx)$ tal que

$$\forall x, t \ \ \left|\frac{\partial}{\partial t} f(x,t)\right| \leq g(x).$$

Pruebe que entonces la función $F(t) = \int f(x,t)\,dx$ es de clase $C^1$ y que su derivada está dada por

$$F'(t) = \int \frac{\partial}{\partial t} f(x,t)\,dx$$

**II** Consideremos $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espacio de medida finita. Diremos que $\mathcal{A} = \{A_1, ..., A_n\}$ es una partición finita si $\mathcal{A}$ es una partición de $X$, los conjuntos $A_i$, $i = 1, ..., n$ son medibles y de medida positiva. Para una partición finita $\mathcal{A}$ considere

$$T_{\mathcal{A}} f = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\mu(A_i)} \int_{A_i} f(x)\,d\mu(x)\ \mathbf{1}_{A_i}.$$

(i) Pruebe que si $f \in L^p$ entonces $T_{\mathcal{A}} f \in L^p$, que $T_{\mathcal{A}}$ es lineal y que en $L^p$ tiene norma menor o igual a 1.

Dadas dos particiones finitas $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ se dice que $\mathcal{B}$ es más fina que $\mathcal{A}$ si todo elemento de $\mathcal{B}$ esta contenido en uno de $\mathcal{A}$ y los elementos de $\mathcal{A}$ son uniones de elementos de $\mathcal{B}$. La notación que usaremos es $\mathcal{A} \leq \mathcal{B}$.

(ii) Pruebe que para $f \in L^p$ con $1 \leq p < \infty$ se tiene el resultado siguiente: dado $\epsilon > 0$ existe $\mathcal{A}$ partición finita tal que

$$\forall \mathcal{B} \text{ partición finita } \mathcal{A} \leq \mathcal{B} \Rightarrow \|T_{\mathcal{B}} f - f\|_p \leq \epsilon.$$

**III** Consideremos $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espacio de medida $\sigma$-finita. Supongamos que $g$ es una función medible que verifica

$$\forall f \in L^p \text{ se tiene } fg \in L^p.$$

Demuestre que $g \in L^\infty$.

# CONTROL 1

Prof. Jaime San Martín

Aux. Arturo Prat

**Pregunta 1** : Sea $(X, \tau, \mu)$ un espacio de medida finita completo. Se dice que una sucesión de funciones medibles $(f_n)$ converge $\mu - c.t.p.$ *Uniformemente* (lo que denotaremos por UCTP) si

$$\forall \epsilon > 0\ \exists A \in \tau,\ \mu(A) < \varepsilon \text{ y } f_n 1_{A^c} \to f 1_{A^c}, \text{ Uniformemente .}$$

El propósito de esta pregunta es probar que UCTP es equivalente a convergencia c.t.p.. Para ello
(i) Considere $B_m^k = \{x \in X : |f_m(x) - f(x)| < \frac{1}{k}\}$, y defina también $A_m^k = \bigcap\limits_{n \geq m} B_n^k$.
Bajo la hipótesis que $(f_n)$ converge puntualmente a $f$ pruebe que la familia $(A_m^k)_m$ es creciente en $m$ y su unión es $X$, para todo $k \geq 1$ fijo.
(ii) Pruebe que para $\varepsilon > 0$ fijo existe una secuencia $m_k$ tal que $\mu(X \setminus A_{m_k}^k) < \varepsilon/2^k$. Concluya que $(f_n)$ converge UCTP a $f$, y generalice al caso en que $(f_n)$ converge a $f$ c.t.p..
(iii) Para la recíproca tome $\varepsilon = 1/j$ y utilice la definición de convergencia UCTP.

**Pregunta 2** : Consideremos la función $\psi(y) = y \log(y+1)$ definida en $\mathbb{R}_+$. En el espacio de medida $([0,1], \mathcal{L}, dx)$ definimos el conjunto de clases de equivalencia de funciones medibles

$$B = \{[f] : \int_0^1 \psi(|f(x)|)dx < \infty\}.$$

La idea es dotar a este espacio de una norma que lo haga Banach, y probar que se encuentra entre $L^1$ y $L^p$ : $p > 1$. En lo que sigue no haremos distinción entre funciones y clases de equivalencia.
(i) Pruebe que la función definida en $(0, \infty)$:

$$a \to \int_0^1 \psi\left(\frac{|f(x)|}{a}\right) dx,$$

es estrictamente decreciente y continua si $f \in B, f \neq 0$.

(ii) Definimos

$$\|f\| = \inf\{a > 0 : \int_0^1 \psi\left(\frac{|f(x)|}{a}\right) dx \leq 1\}.$$

Pruebe que $B = \{f : \|f\| < \infty\}$, y que si $f \in B, f \neq 0$ entonces

$$\int_0^1 \psi\left(\frac{|f(x)|}{\|f\|}\right) dx = 1.$$

(iii) Pruebe que $\| \ \|$ tiene la siguiente monotonía en $B$

$$0 \leq f \leq g \Rightarrow \|f\| \leq \|g\|,$$

y deduzca que si $0 \leq f_n \uparrow f$, con $f_n \in B$, y existe $C < \infty$ tal que $\|f_n\| \leq C$ entonces $f \in B$ y $\|f_n\| \uparrow \|f\|$. Ind.: Utilice Fatou.

(iv) Pruebe que $f_n \to 0$ en la norma de $B$ si y sólo si $\int_0^1 \psi(|f_n(x)|)dx \to 0$.

(v) Pruebe el siguiente Teorema de convergencia dominada: si $f_n \to f$ $dx$−c.t.p y $|f_n| \leq g \in B$ entonces $\|f_n - f\| \to 0$

(vi) Pruebe que $\| \ \|$ es una norma en $B$. Para la desigualdad triangular considere $\frac{|f+g|}{\|f\|+\|g\|}$.

(vii) Pruebe que $(B, \| \ \|)$ es un Banach contenido en $L^1$ y que contiene a todo $L^p$ para $p > 1$.

Las siguientes propiedades de $\psi$ le pueden ser útiles:

- Es una función continua, estrictamente creciente, convexa.
- Tiene un crecimiento moderado en $\infty$, esto es

$$\forall y \geq e \ \ y \leq \psi(y)$$
$$\forall p > 1 \ \exists C(p) < \infty, \ y(p) < \infty \ \forall y \geq y(p) \qquad \psi(y) \leq C(p)y^p.$$

- Tiene variación lenta en $\infty$:

$$\forall R > 0 \ \exists D(R) < \infty, \ y(R) < \infty \ \forall y \geq y(R) \qquad \psi(Ry) \leq D(R)\psi(y)$$

- Finalmente tiene además la propiedad

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists C(\varepsilon) < \infty, \ \forall y \geq \varepsilon \ \ y \leq C(\varepsilon)\psi(y).$$

# Control 1 Análisis II

Prof. J. San Martín, Aux. F. Schwartz

## PREGUNTA 1

Sea $A \subseteq I\!R^2$. El diámetro de $A$, $d(A)$, se define como

$$d(A) = \sup\{|x-y|/x, y \in A\}.$$

Note que $d(A) = d(\overline{A})$, $d(\emptyset) = 0$. También recordamos que

$$dist(A, B) = \inf\{|x-y|/x \in A, \quad y \in B\}$$

es la distancia entre $A$ y $B$.
Denotaremos por $\mathcal{R}_\varepsilon(A)$ el conjunto de recubrimientos $(B_k)_{k \in I\!N}$ de $A$ tales que $d(B_k) \leq \varepsilon$ $\forall k \in I\!N$.
Se define $\Lambda : \mathcal{P}(I\!R^2) \to I\!R_+ \cup \{\infty\}$ como

$$\Lambda(A) = \lim_{\varepsilon \to 0} \Lambda_\varepsilon(A)$$

donde

$$\Lambda_\varepsilon(A) = \inf\{\sum_{k \in I\!N} d(B_k) \ / \ (B_k)_{k \in I\!N} \in \mathcal{R}_\varepsilon(A)\}.$$

Muestre que $\Lambda$ está bien definida, y note que

$$A \subseteq B \Rightarrow \emptyset \neq \mathcal{R}_\varepsilon(I\!R^2) \subseteq \mathcal{R}_\varepsilon(B) \subseteq \mathcal{R}_\varepsilon(A).$$

(i) Pruebe que $\Lambda$ es una medida exterior.

(ii) Pruebe que $\Lambda$ satisface además:
(a) $A, B \subseteq I\!R^2$, $dist(A, B) > 0 \Rightarrow \Lambda(A \cup B) = \Lambda(A) + \Lambda(B)$.
(b) $\Lambda(A + x) = \Lambda(A)$ $\forall x \in I\!R^2$, donde $A + x = \{a + x/a \in A\}$ es el trasladado de $A$ en $x$.
(c) $\Lambda(\alpha A) = |\alpha|\Lambda(A)$ $\forall \alpha \in I\!R$ y que $\Lambda(\{0\}) = 0$, donde $\alpha A = \{\alpha a/a \in A\}$.
(d) Más generalmente si $\psi : I\!R^2 \to I\!R^2$ es una contracción, es decir,

$|\psi(x) - \psi(y)| \leq |x - y| \quad , \forall x, y \in \mathbb{R}^2$ entonces $\Lambda(\psi(A)) \leq \Lambda(A)$.

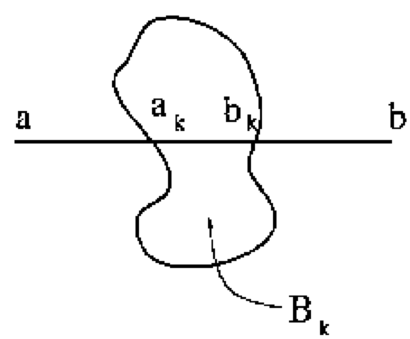
Se puede probar con (a) que todo Boreliano de $\mathbb{R}^2$ es $\Lambda$-medible. Además de (d) se concluye que $\Lambda$ es invariante por rotaciones.
Podemos considerar en lo que sigue $\Lambda : \mathcal{B} \to \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ la medida que induce $\Lambda$ en los Borelianos. Por qué?

(iii) Demuestre que si $D = [a, b] \times \{0\}$ entonces $\Lambda(D) = b - a$ y concluya que para todo trazo recto $H(x, y) = \{tx + (1-t)y \ / \ t \in [0, 1]\}$ se tiene que $\Lambda(H(x, y)) = |x - y|$.
Pruebe además que si $C = [0, 1] \times [0, 1]$, entonces $\Lambda(C) = \infty$ y deduzca que $\Lambda(A) = \infty$ para cualquier $A \subsetneq \mathbb{R}^2$ tal que $int(A) \neq \emptyset$.
Indicación: Para la primera parte vea lo siguiente:
si $(B_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathcal{R}_\varepsilon(D)$, entonces definiendo para $B_k \cap D \neq \emptyset$

$$a_k = \inf\{r / (r, 0) \in B_k\}$$

$$b_k = \sup\{r / (r, 0) \in B_k\}$$

entonces $b_k - a_k \leq d(B_k)$, $\cup_k [a_k, b_k] = [a, b]$. Concluya que $b - a \leq \Lambda(A)$ y para la otra desigualdad tome un recubrimiento especial.




(iv) Sea $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ una curva continua simple (i.e. $\gamma$ inyectiva). El propósito de esta parte es probar que

$$\Lambda(C) = l(\gamma)$$

donde $l(\gamma)$ es el largo de la curva y $C = \gamma([0, 1])$.
Recordemos que $l(\gamma) = \sup_{\mathcal{P}} \sum |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i+1})|$ donde $\mathcal{P}$ es la colección de particiones finitas de $[0, 1]$.
En lo que sigue consideraremos curvas de largo finito.
La parametrización natural $\psi : [0, l(\gamma)] \to \mathbb{R}^2$ es tal que $l(\psi|_{[0,t]}) = t$. De aquí se deduce que $\psi$ verifica $|\psi(t) - \psi(s)| \leq |t - s|$ para $t, s \in [0, l(\gamma)]$.
(a) Pruebe que $\Lambda(C) = \Lambda(\psi([0, l(\gamma)])) \leq \Lambda([0, l(\gamma)]) = l(\gamma)$ donde hemos identificado $[0, l(\gamma)]$ con $[0, l(\gamma)] \times \{0\}$.

(b) Sea $\mathcal{P} = (t_i)_{i=0,\cdots,n}$ una partición finita de $[0,1]$. Considere la poligonal que pasa por los puntos $(\gamma(t_i))_{i=0,\cdots,n}$.
Pruebe que la proyección del pedazo de curva $\gamma[t_i, t_{i+1}]$ sobre la recta que pasa por $\gamma(t_i)$ y $\gamma(t_{i+1})$ contiene al trazo $H_i = H(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1}))$.

Pruebe que

$$\Lambda(H_i) \leq \Lambda(\gamma[t_i, t_{i+1}])$$

y concluya que $l(\gamma) \leq \Lambda(C)$.

## PREGUNTA 2

Considere $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ creciente continua a la derecha y denotemos por $\mu_F$ la medida de Lebesgue- Stieltjes que $F$ induce. Se quiere probar que si $f$ es de clase $C^1$ entonces

$$\int f(x) 1_{[0,1]}(x) d\mu_F(x) = F(1)f(1) - F(0^-)f(0) - \int_0^1 F(x)f'(x)dx.$$

En lo que sigue denotaremos por $x_i^n = \frac{i}{2^n}$ para $i = 0, \cdots, 2^n$.

(i) Pruebe que

$$f_n = f(0)1_{\{0\}} + \sum_{i=0}^{2^n-1} f(x_i^n) 1_{(x_i^n, x_{i+1}^n]}$$

converge puntualmente a $f$ en $[0,1]$.
Deduzca que

$$\int f_n 1_{[0,1]} d\mu_F \overset{n\to\infty}{\to} \int f 1_{[0,1]} d\mu_F.$$

(ii) Pruebe que

$$\int f_n 1_{[0,1]} d\mu_F = F(1) f(\frac{2^n-1}{2^n}) - F(0^-)f(0) - \sum_{i=1}^{2^n-1} F(x_i^n)(f(x_i^n) - f(x_{i-1}^n)).$$

Concluya el resultado.
Indicación: Recuerde que si $f$ es $C^1$ entonces $f(y) = f(x) + f'(x)(y-x) + R(x,y)$ donde

$$\sup_{0<|x-y|<\delta} \frac{|R(x,y)|}{|x-y|} \overset{\delta\to 0}{\to} 0.$$

Control 2, Medida.

Prof. J. San Martín, Aux. R. Menares.
Mayo 2002

1. Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida completo. Para $f : X \to I\!R_+$ considere

$$E(f) = \{(x, y) \in X \times I\!R \;/\; 0 \leq y < f(x)\}$$
$$H(f) = \{(x, y) \in X \times I\!R \;/\; 0 \leq y \leq f(x)\}$$

   (i) Muestre que si $f_n \uparrow f$ entonces $E(f_n) \uparrow E(f)$.
   (ii) Muestre que si $f$ es simple positiva entonces $E(f), H(f)$ pertenecen a $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}$ donde $\mathcal{B}$ son los borelianos de $I\!R$.
   Concluya que si $f \geq 0$ es medible. entonces $E(f) \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}$.
   (iii) Para $f \geq 0$ medible, pruebe que

$$\mu \otimes \lambda(E(f)) = \int_X f d\mu$$

   (iv) Para $f \geq 0$ medible, pruebe que

$$H(f) \in \overline{\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}}$$
$$\mu \otimes \lambda(H(f)) = \int_X f d\mu, \text{ y}$$
$$\mu \otimes \lambda(\{(x, y) \in X \times I\!R_+ \;/\; y = f(x)\}) = 0.$$

2. Sean $(a_{i,j})$, $(i, j) \in I\!N^2$; $(b_j^{(n)})$, $(n, j) \in I\!N^2$ y $(c_j)$, $j \in I\!N$, números reales positivos que verifican:

$$\forall n \in I\!N \quad \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j}\, b_j^{(n)} = 1,$$
$$\forall j \in I\!N \quad \lim_{n\to\infty} b_j^{(n)} = c_j,$$
$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j}\, c_j = 1.$$

Definamos $d_i^{(n)} =: \sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j}\, b_j^{(n)}$ y $e_i =: \sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j}\, c_j$. Probaremos que

$$\forall i \in I\!N \quad \lim_{n\to\infty} d_i^{(n)} = e_i.$$

Para ello pruebe:

(I) $\underline{\lim}_{n\to\infty} d_i^{(n)} \geq e_i$.

(II) Si $(n_k)$ es una secuencia tal que para todo $i$ $(d_i^{(n_k)})_k$ converge cuando $k \to \infty$, entonces

$$1 \geq \sum_{i=0}^{\infty} \lim_k d_i^{(n_k)}.$$

(III) Si para algún $i_0 \in I\!N$ se tiene $\overline{\lim}_{n\to\infty} d_{i_0}^{(n)} > e_{i_0}$, construya una subsucesión $(n_k)$ tal que para todo $i$ $(d_i^{(n_k)})_k$ converge y

$$\lim_{k\to\infty} d_{i_0}^{(n_k)} = \overline{\lim}_{n\to\infty} d_{i_0}^{(n)}.$$

Usando (I) y (II) llegue a una contradicción.

3. Consideremos $(I\!R, \mathcal{L}, \mu)$, donde $\mu$ es la medida de Lebesgue. Se dice que un punto $x \in I\!R$ es un punto de densidad 1 para $A \in \mathcal{L}$ si

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\mu(A \cap (x-\varepsilon, x-\varepsilon))}{2\varepsilon} = 1.$$

Sea $A \in \mathcal{L}$. Probaremos que casi todo $x \in A$, $x$ es punto de densidad 1 para $A$. Para ello primero pruebe que se puede suponer $A$ acotado. En este caso utilice $f(z) = \int_{-\infty}^{z} \mathbf{1}_A(u) d\mu(u)$ para probar el resultado.

CONTROL 2

Prof. Jaime San Martín

Aux. Arturo Prat

**Pregunta 1** : Sea $(X, \tau, \mu)$ un espacio de medida finita completo. Consideremos además el espacio de medida $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, \lambda)$, donde $\lambda$ es la medida de Lebesgue. Para $f : X \to \mathbb{R}_+$ definimos los conjuntos

$$G(f) := \{(x, t) : 0 \leq t < f(x)\}$$

y

$$H(f) := \{(x, t) : 0 \leq t \leq f(x)\}.$$

(i) Pruebe que si $f$ es medible entonces $G$ es medible en el producto $\tau \otimes \mathcal{L}$.

(ii) Pruebe que $\int\limits_X f(x) d\mu(x) = \mu \otimes \lambda(G)$. Demuestre además que $\mu \otimes \lambda(H - G) = 0$ y deduzca que la curva $\{(x, t) : t = f(x)\}$ tiene medida cero en el producto.

**Pregunta 2** : Sea $(X, \tau, \mu)$ un espacio de medida finita completo, con $\mu(X) = 1$.

2 (i) Considere la $\sigma$-álgebra: $\mathcal{F} = \{\phi, A, A^c, X\}$, donde $A \in \tau$ verifica $0 < \mu(A) < 1$. Si $f$ es una función $\tau$-medible y positiva calcule la única función $g \geq 0$ que es $\mathcal{F}$-medible y que satisface

$$\forall B \in \mathcal{F} \quad \int\limits_B f d\mu = \int\limits_B g d\mu.$$

De un ejemplo donde claramente $f$ y $g$ son distintas.

1, (ii) Generalice al caso en que $\mathcal{F}$ es generada por una partición finita $(A_i)_{i=1 \ldots n} \subset \tau$ donde $\forall i \; \mu(A_i) > 0$. Para ello estudie las funciones $\mathcal{F}$-medibles y en particular pruebe que todo conjunto $B \in \mathcal{F}$ es una reunión finita de una subcolección de $(A_i)_{i=1 \ldots n}$. Debe probar entonces que para $f$ función $\tau$-medible y positiva existe una única función $g \geq 0$ $\mathcal{F}$-medible tal que

$$\forall B \in \mathcal{F} \quad \int\limits_B f d\mu = \int\limits_B g d\mu.$$

Se pide además calcular $g$.

Ind. Reduzca a probar la propiedad para los $(A_i)_{i=1 \ldots n}$.

2 (iii) Nuestro propósito es ahora generalizar lo anterior para una sub$\sigma$-álgebra $\mathcal{F} \subset \tau$ arbitraria. Para ello considere $\nu(A) = \int\limits_A f d\mu$ y pruebe que $\nu$ es una medida $\sigma$-finita

absolutamente continua con respecto a $\mu$. Concluya que existe una única ($\mu$-c.t.p.) función $g \geq 0$ $\mathcal{F}$-medible, tal que

$$\forall B \in \mathcal{F} \quad \int_B f d\mu = \int_B g d\mu.$$

¿Qué sucede si $f$ es $\mathcal{F}$-medible? ¿Cómo extendería este resultado para $f$ integrable? Si denotamos por $g = P(f)$ pruebe que $P$ es una transformación lineal de $L^1(\tau)$ en $L^1(\mathcal{F})$, que satisface:

- $P$ es monótona, es decir $h \leq f$ entonces $P(h) \leq P(f)$. Concluya que $|P(f)| \leq P(|f|)$.
- $P$ es continua y más aún $\|P(f)\| \leq \|f\|$.
- $P(1) = 1$
- $P(P(f)) = P(f)$.

Como aplicación de lo anterior considere $([0,1]^2, \mathcal{L}^2, dx \otimes dy)$ donde $dx \otimes dy$ es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^2$. Considere la colección de conjuntos

$$\mathcal{F} = \{[0,1] \times A \subseteq [0,1]^2 : \; A \in \mathcal{L}\}.$$

1.

Pruebe que $\mathcal{F}$ es una sub$\sigma$-álgebra de $\mathcal{L}^2$, y calcule cuanto vale $P(f)$ donde $f(x,y) = \mathrm{sen}(xy)$.
Ind. Pruebe que $g$ es $\mathcal{F}$-medible ssi existe una función $h$ que es $\mathcal{L}$-medible tal que $g(x,y) = h(y)$ $dx \otimes dy$-c.t.p.

# CONTROL 2 ANALISIS II

Prof. Jaime San Martín

**Pregunta 1** : Sea $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función creciente y continua por la derecha. Denotaremos por $\mu$ la medida de Lebesgue-Stieltjes que $F$ induce. Consideremos $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de clase $C^1$. Probaremos la fórmula de integración por partes $\forall x > 0$

$$g(F(x)) - g(F(0)) = \int_{(0,x]} g'(F(y-))d\mu(y) + \\ + \sum_{0<y\leq x} g(F(y)) - g(F(y-)) - g'(F(y-))(F(y) - F(y-)).$$

(a) Pruebe que la serie de la fórmula anterior converge absolutamente.

(b) Pruebe que dado $\epsilon > 0$ existe una cantidad finita de puntos $x_0 = 0 < x_1 < \ldots < x_n = x$ tal que para $i = 2, \ldots, n$ se tiene

$$x_i - x_{i-1} \leq \epsilon \text{ y } |F(x_i-) - F(x_{i-1})| \leq \epsilon.$$

(c) Pruebe que

$$g(F(x_i)) - g(F(x_{i-1})) = g'(F(x_{i-1}))(F(x_i) - F(x_{i-1})) + \\ g(F(x_i)) - g(F(x_i-)) - g'(F(x_{i-1}))(F(x_i) - F(x_i-)) + R_i,$$

donde $\sum_i |R_i| \to 0$ cuando $\epsilon \to 0$.

Indicación: Recuerde que $\sup\{\frac{|g(z)-g(u)-g'(u)(z-u)|}{|z-u|}\}$ donde el supremo es tomado sobre el conjunto $\{|z| \leq a,\ |u| \leq a,\ |z-u| \leq \rho\}$ con $a$ finito fijo, converge a 0 cuando $\rho \to 0$.

Pruebe la fórmula de integración por partes.

**Pregunta 2** : Consideremos $\beta = \beta([0,1])$ los borelianos de $[0,1]$. Una función $Q : [0,1] \times \beta \to [0,1]$ se dirá un núcleo de transición si

( 1) $\forall x \in [0,1]\ \ Q(x, \bullet)$ es una medida en $\beta$ tal que $Q(x,[0,1]) = 1$.

( 2) $\forall B \in \beta\ \ Q(\bullet, B)$ es una función $\beta/\beta$-medible.

Pruebe las siguientes propiedades:

( a) Si $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}_+$ es $\beta \otimes \beta/\beta$-medible, entonces

$$x \to \int f(x,y)Q(x,dy)$$

es $\beta/\beta$-medible.

( b) Supongamos adicionalmente que $\forall y\ \ \int f(x,y)dx = 1$ entonces

$$(y, B) \to \int f(x,y)Q(x,B)dx$$

es un núcleo de transición.

( c) $(x, B) \to \int Q(y,B)Q(x,dy)$ también es un núcleo de transición.

( d) Existe una única medida $\nu$ en $([0,1] \times [0,1], \beta \otimes \beta)$ tal que:

$$\forall A, B \in \beta \quad \nu(A \times B) = \int_A Q(x,B)dx.$$

Dar una fórmula para la medida de un conjunto $C \in \beta \otimes \beta$ arbitrario. Calcular esta medida en los casos siguientes:

( i) $Q(x, \bullet)$ es la medida de Lebesgue.

( ii) $Q(x, \bullet)$ es la medida concentrada en $\{x\}$.

Control 2 Análisis II

Prof. J. San Martín, Aux. F. Schwartz

(1) Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida completo. Para $f : X \to I\!R_+$ considere

$$E(f) = \{(x,y) \in X \times I\!R \ / \ 0 \le y < f(x)\}$$
$$H(f) = \{(x,y) \in X \times I\!R \ / \ 0 \le y \le f(x)\}$$

(i) Muestre que si $f_n \uparrow f$ entonces $E(f_n) \uparrow E(f)$.

(ii) Muestre que si $f$ es simple positiva entonces $E(f), H(f)$ pertenecen a $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}$ donde $\mathcal{B}$ son los borelianos de $I\!R$.

Concluya que si $f \ge 0$ es medible, entonces $E(f) \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}$.

(iii) Para $f \ge 0$, simple, pruebe que

$$\mu \otimes \lambda(E(f)) = \int f d\mu$$

Extienda esta igualdad para $f \ge 0$ medible.

(iv) Utilizando el teorema de Tonelli pruebe que para toda $f \ge 0$ medible

$$\mu \otimes \lambda(H(f)) = \int f d\mu$$

Concluya que $\mu \otimes \lambda(\{(x,y) \in X \times I\!R_+ \ / \ y = f(x)\}) = 0$.

2. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida completo con $\mu(\Omega) = 1$. Consideremos $G \subseteq \mathcal{F}$ una sub $\sigma$-álgebra de $\mathcal{F}$. Para $f : \Omega \to I\!R_+$ $\mathcal{F}$-medible y de cuadrado integrable consideremos la medida definida en $G$

$$\forall A \in G \quad \nu(A) = \int_A f d\mu$$

(i) Pruebe que $\nu$ es una medida finita y que $\nu << \mu$. Pruebe que existe $g : \Omega \to I\!R_+$ única $\mu$-c.t.p y $G$-medible tal que $\nu(A) = \int_A g d\mu$, es decir $\forall A \in G \quad \int_A g d\mu = \int_A f d\mu$. Notar que $g$ no necesariamente es igual a $f$. Para ello estudie el caso donde $G = \{\phi, \Omega\}$ es la $\sigma$-álgebra trivial. Cuanto vale $g$ en este caso?

(ii) Si $h \in L^2(G, d\mu)$ es simple pruebe que

$$\int f h d\mu = \int g h d\mu \text{ y que } \left|\int g h d\mu\right| \le \|f\|_2 \cdot \|h\|_2,$$

de donde concluya que $g$ es de cuadrado integrable y que $\|g\|_2 \leq \|f\|_2$. Indicación piense en $(L^2(G, d\mu))^*$.

(iii ) Demuestre que

- $f$ es $G$-medible ssi $f = g$.
- •• Sean $f_1, f_2 \in L^2(\mathcal{F}, d\mu)$ y $g_1, g_2$ las funciones $G$-medibles asociadas. Pruebe que a $f_1 + f_2$ le corresponde $g_1 + g_2$.

3. Consideremos $V = \{\sum_{m=0}^{\infty} a_m cosmx + b_m senmx / a_m, b_m \in \mathbb{R}\ a_m = b_m = 0\, \forall m \geq m_0\}$ el espacio vectorial generado por las funciones $\{1, cosmx, senmx, m \geq 1\}$. Probaremos que $V$ es denso en $L^2((-\pi,\pi), dx)$.

I Pruebe que si $V$ es denso en $C_0((-\pi,\pi))$ entonces $V$ es denso en $L^2$.

II Considere $f \in C_0(-\pi,\pi)$ y definamos

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, cos(mx)\, dx \quad b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, sen(mx)\, dx$$

para $m \geq 1$, y

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx.$$

Definimos $S_k(x) = \sum_{m=0}^{k} a_m cosmx + b_m senmx$ y $\sigma_n(x) = \frac{S_0(x)+\ldots+S_{n-1}(x)}{n}$. En lo que sigue supondremos que $f$ está extendida a todo $\mathbb{R}$ de manera $2\pi$ periodica, es decir $\forall x\ f(x+2\pi) = f(x)$.

(i) Pruebe que

$$S_k(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{sen((\frac{2k+1}{2})(t-x))}{2sen(\frac{t-x}{2}}) \, dt$$

y concluya que

$\sigma_n(x) = \frac{1}{2n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\frac{sen(\frac{n(t-x)}{2})}{sen(\frac{t-x}{2})})^2 f(t) dt$

Indicación:

$$\frac{1}{2} + cosu + cos2u + \ldots + cosmu = \frac{sen(\frac{2m+1}{2}u)}{2sen\frac{u}{2}}$$

$$senu + sen3u + \ldots + sen(2m-1)u = \frac{(sen(mu))^2}{sen(u)}$$

(ii) Definamos $\phi_n(z) = \frac{1}{2n\pi}\left(\frac{sen(n\frac{z}{2})}{sen(\frac{z}{2})}\right)^2$, así demuestre que

$$\sigma_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+z)\phi_n(z)dz.$$

(iii) Pruebe que $\phi_n \geq 0$; $\int_{-\pi}^{\pi} \phi_n(z)dz = 1$ ; y que $\forall\delta > 0$ suficientemente pequeño $\int_{-\pi}^{-\delta} \phi_n(z)dz = \int_{\delta}^{\pi} \phi_n(z)dz \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

(iv) Pruebe que $\sigma_n \to f$ uniformemente, para ello note que

$$f(x) - \sigma_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - f(x+z))\phi_n(z)dz$$

y separe esta integral en tres partes $(-\pi,-\delta]$, $(-\delta,\delta)$ y $[\delta,\pi)$.

(v) De (iv) concluya que $\sigma_n \xrightarrow{L^2} f$, y pruebe que $V$ es denso en $L^2$.

Analisis II. Control N°2.

1.— (*) Sea $(X, \mathcal{B}, \mu)$ espacio de medida $\sigma$-finito. Sea $f: X \longrightarrow [0,\infty]$ función medible.

La función $[0,\infty) \longrightarrow [0,\infty]$, $t \longrightarrow \mu\{f > t\}$ (donde $\mu\{f>t\} = \mu(\{x \in X : f(x) > t\})$) se le llama función de distribución de $f$.

Pruebe que:

<u>Teorema</u>. Si $\varphi : [0,\infty] \longrightarrow [0,\infty]$ una función monotona, absolutamente continua en $[0,T)$ para todo $T < \infty$ y tal que $\varphi(0) = 0$ y $\varphi(t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \varphi(\infty)$ entonces

$$\int_X \varphi \circ f \, d\mu = \int_0^\infty \mu\{f > t\} \, \varphi'(t) \, dt. \qquad (*)$$

<u>Obs</u>. De este teorema se concluye en particular que

$$\int f \, d\mu = \int_0^\infty \mu\{f > t\} \, dt.$$

<u>Hint</u>. Considere $E = \{(x,t) \in X \times [0,\infty] : f(x) > t\}$

Pruebe que la expresión de la derecha de $(*)$ es

$$\int_X d\mu(x) \int_0^\infty 1_E(x,t) \, \varphi'(t) \, dt.$$

2.- Recuerde que si $(X, \mathcal{B}, \mu)$ espacio de medida entonces $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ es medible sii $\mathrm{Re} f$ ∧ $\mathrm{Im} f$ son medibles y $f \in L^1(\mu)$ sii $\mathrm{Re} f$ ∧ $\mathrm{Im} f$ están en $L^1(\mu)$ y en este caso

$$\int f \, d\mu = \int \mathrm{Re} f \, d\mu + i \int \mathrm{Im} f \, d\mu .$$

Sea $(X, \mathcal{B}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{L}, \lambda)$ con $d\lambda = dx$ la medida de Lebesgue. Sea $f \in L^1(\lambda)$. Se tiene que

$$\boxed{\forall\, t \in \mathbb{R} : \quad \hat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(x)\, e^{-itx}\, dx}$$

está bien definida. ¿por qué?

Pruebe que:

Teorema Sean $f, g \in L^1(\lambda)$ entonces:

(i) $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$

(ii) $\hat{f}$ es continua.

(iii) $\lim_{|t| \to \infty} \hat{f}(t) = 0$

(iv) $\forall\, t \in \mathbb{R}$ se tiene $\widehat{(f * g)}(t) = \hat{f}(t) \cdot \hat{g}(t)$

Hint. Para (iii) muestre que

$2\hat{f}(t) = \hat{f}(t) - \hat{g}(t)$ donde $g = T_{-\frac{\pi}{t}} f$ i.e. $g(x) = f\left(x - \frac{\pi}{t}\right)$.

$\widehat{(f * g)}(t) = \hat{f}(t$ ...

3.- Sea $(X, \mathcal{B}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{L}, \lambda)$ con $d\lambda = dx$ la medida de Lebesgue.

Diremos que $\varphi : L^1(\lambda) \longrightarrow \mathbb{C}$, $f \longmapsto \varphi(f)$ es un homomorfismo complejo

si $\varphi$ es lineal, $\|\varphi\| \leq 1$ y si verifica:

$$\varphi(f * g) = \varphi(f) \cdot \varphi(g) \quad \forall f, g \in L^1(\lambda).$$

$\varphi = 0$ es el homomorfismo nulo i.e. $\varphi(f) = 0 \quad \forall f \in L^1(\lambda)$

Probaremos el resultado siguiente:

Teorema. Si $\varphi$ es homomorfismo complejo t.q. $\varphi \neq 0$ entonces existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $\varphi(f) = \hat{f}(t)$.

Obs. Por 2 i), (v) se tiene que $\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi(f) = \hat{f}(t)$ define un homomorfismo complejo.

Probemos el Teorema. Sea pues $\varphi$ homomorfismo complejo $\varphi \neq 0$.

a) Pruebe que $\exists\, \beta \in L^\infty(\lambda)$ tal que $\varphi(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x)\beta(x)\,dx$ $\forall f \in L^1(\lambda)$.

b) Para $f \in L^1(\lambda)$, $y \in \mathbb{R}$ denote por $f_y$ la función $f_y(x) = f(x-y)$. Pruebe que para $g \in L^1(\lambda)$

$$\varphi(f * g) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} g(y)\, \varphi(f_y)\, dy$$

c) Usando que $\varphi$ es homomorfismo complejo tal que $\varphi \neq 0$ y tomando $f \in L^1(\lambda)$ tal que $\varphi(f) \neq 0$ pruebe que

$$\varphi(f)\,\beta(y) = \varphi(f_y). \quad \lambda\text{-c.t.p. en } y. \quad (**)$$

d) Muestre que se puede tomar $\beta$ continua.

<u>Hint</u>. Use la continuidad de la traslación $T_y f$ en $L^1(\lambda)$.

e) Usando (**) $\forall y \in \mathbb{R}$ pruebe que:

$$\beta(x+y) = \beta(x)\cdot\beta(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

d) Use que $\varphi \not\equiv 0$ para deducir que $\beta(0) = 1$ y use la continuidad de $\beta$ para probar la existencia de $c \neq 0$ tal

$$c := \int_0^\delta \beta(y)\,dy \neq 0$$

y use e) para mostrar que

$$c\,\beta(x) = \int_x^{x+\delta} \beta(y)\,dy$$

y deducir que $\beta$ es diferenciable.

e) Concluya que $\beta(x) = e^{Ax}$ para algún $A \in \mathbb{C}$ y use $\beta \in L^\infty(\lambda)$ para concluir que $\beta(x) = e^{-itx}$ para algún $t \in \mathbb{R}$.

<u>Obs</u>. El $t \in \mathbb{R}$ dado por el Teorema es <u>único</u>.

4. Sea $(X, \mathcal{B}, \mu)$ espacio de medida finita t.q. $X$ es espacio métrico $\mathcal{B} = \mathcal{B}_o(X)$ la $\sigma$-álgebra de los Borelianos.

Probaremos que:

<u>Teorema</u>. $\forall A \in \mathcal{B}$ se tiene

$$\left.\begin{aligned}\mu(A) &= \sup\{\mu(C) : C \subseteq A,\ C \text{ cerrado}\}\\ &= \inf\{\mu(O) : O \supseteq A,\ O \text{ abierto}\}.\end{aligned}\right\} \ (***)$$

Para probarlo muestre que

a) $\mathcal{B}_0 = \{A \in \mathcal{B} : A \text{ verifica } (***)\}$ es una $\sigma$-algebra.

b) $C \in \mathcal{B}_0 \quad \forall C$ cerrado.

Concluya!

Ahora muestre que:

c) <u>Proposición</u>. Si $\mu, \nu$ medidas finitas en $(X, \mathcal{B})$ tal que $\int f \, d\mu = \int f \, d\nu \quad \forall f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ continua entonces $\mu = \nu$.

<u>Hint</u>. Sea $F$ cerrado, considere $f_u(x) = \varphi_u(d(x, F))$ donde $\varphi_u(t) = \varphi(ut)$ siendo

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \leq 0 \\ 1-t & \text{si } t \in [0,1) \\ 0 & \text{si } 1 \leq t. \end{cases}$$

<u>Tiempo</u>. 6 horas

**CONTROL 3**

Prof. Jaime San Martín

Aux. Arturo Prat

**Pregunta 1** : Pruebe que existe una única medida de Probabilidad $\mathbb{P}$ en $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}_+}, \mathcal{B}^{\mathbb{R}_+})$ cuyas leyes finito dimensionales son puramente atómicas y verifican: $\forall 0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n$

$$\mu_{t_1 t_2 \ldots t_n}(\{(m_1, m_2, \ldots, m_n)\}) = \prod_{i=1}^{n} e^{-(t_i - t_{i-1})} \frac{(t_i - t_{i-1})^{m_i - m_{i-1}}}{(m_i - m_{i-1})!},$$

donde $m_0 = 0 = t_0$, y $m_1 \leq m_2 \leq \ldots \leq m_n$ son enteros no negativos. Por convención supondremos que $0^0 = 1$. Denotemos por $S^n$ el conjunto de n-tuplas enteras no negativas $\bar{m}$ que verifican las restricciones de monotonía. Notar que la medida de un Boreliano $B$ de $\mathbb{R}^n$ se calcula como:

$$\mu_{t_1 t_2 \ldots t_n}(B) = \sum_{\bar{m} \in B \cap S^n} \mu_{t_1 t_2 \ldots t_n}(\{(m_1, m_2, \ldots, m_n)\}).$$

Pruebe además que $\mathbb{P}$ y las funciones coordenadas $X_t : \mathbb{R}^{\mathbb{R}_+} \to \mathbb{R}$, verifican: si $s < t$ entonces $X_t - X_s$ es independiente del conjunto de variables aleatorias $\{X_u : 0 \leq u \leq s\}$. Calcule la distribución de $X_t - X_s$. Pruebe además que $\mathbb{P}(X_0 = 0) = 1$.

**Pregunta 2** : El propósito de esta pregunta es estudiar la transformada de Fourier. Para ello necesitamos una generalización de un resultado visto en clases. En lo que sigue nuestro espacio de medida es $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, dx)$.

**Teorema** Supongamos que el núcleo regularizador $K_a(x)$ verifica

- $K_a(x)$ es continua en $x$ para todo $a$;
- $K_a(x)$ es integrable en $x$ y $\int K_a(x)dx = 1$;
- Existen $0 < C_1, C_2 < \infty$ tal que para todo $a$ grande $C_1 \leq \int |K_a(x)|dx \leq C_2$;
- Para todo $\delta > 0$ fijo se verifica $\lim_{a \to \infty} \int_{|x|>\delta} |K_a(x)|dx = 0$.

Entonces para $f \in L^1$ se tiene $\lim_{a \to \infty} \|f - K_a * f\|_1 = 0$. ■

Consideremos la transformada

$$\hat{f}(\xi) = \int f(x) e^{-ix\xi} dx = \int f(x) \cos(x\xi) dx - i \int f(x) \text{sen}(x\xi) dx.$$

0.5 (i) Pruebe que si $f \in L^1$ entonces $\hat{f}$ está bien definida.

1. (ii) Supongamos que $h, H, f$ son funciones integrables y que $h(x) = \frac{1}{2\pi}\int H(\xi)e^{ix\xi}d\xi$. Demuestre que

$$h * f(x) = \frac{1}{2\pi}\int H(\xi)\hat{f}(\xi)e^{ix\xi}d\xi.$$

(iii) Considere $K(x) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\operatorname{sen}(x/2)}{x/2}\right)^2$. Pruebe que

0.5

$$K(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}(1-|\xi|)e^{i\xi x}d\xi.$$

Tomemos $K_n(x) = nK(nx)$ para $n \geq 1$, y utilizando el Teorema enunciado pruebe que para $f \in L^1$ la sucesión de funciones

3.0

$$f_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-n}^{n}\left(1-\frac{|\xi|}{n}\right)\hat{f}(\xi)e^{ix\xi}d\xi$$

converge a $f$ en la norma de $L^1$.

1 Ind.: Para calcular $\int \frac{(\operatorname{sen}(x/2))^2}{x^2}dx$ estudie la integral $\int \frac{1-\cos(x)}{x^2+a^2}dx$, calculada por residuos a la integral $\int \frac{1-e^{iz}}{z^2+a^2}dz$ y tome límite cuando $a \to 0$.

## Control 3 de medida

1 (i) Consideremos $\nu$ una medida con signo finita en $([0,1],\beta)$ tal que $\nu(\{0\}) = 0 = \nu([0,1])$. Si definimos $F(x) = \nu([0,x])$ entonces $F$ es de variación acotada y es continua por la derecha. Pruebe que si $f$ es de clase $C^1$

$$\int_0^1 f\,d\nu = -\int_0^1 F(x) f'(x)\,dx$$

Indicación: pruebe que

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(F(x_i) - F(x_{i-1})) = -\sum_{i=1}^{n} F(x_i)(f(x_i) - f(x_{i-1}))$$

donde $x_0 = 0 < x_1, \cdots, < x_n = 1$.

(ii) Supongamos que $\mu$ es una medida finita en $([0,1],\beta)$ tal que si $g$ es una función de clase $C^1$ salvo en un número finito de puntos entonces

$$\left|\int_0^1 g'\,d\mu\right| \leq C\|g\|$$

donde $C$ es una constante finita independiente de $g$ y $\|g\| = \sup_{x\in[0,1]} |g(x)|$. Usando el Teorema de Stone-Weirstrass pruebe que $L(g) = \int_0^1 g'\,d\mu$ se puede extender de forma continua a $C([0,1])$ verificando

$$|L(g)| \leq C\|g\|$$

para toda función continua $g$. Concluya que existe una medida con signo finita $\nu$ tal que $L(g) = \int_0^1 g\,d\nu$ cualquiera sea $g$ continua. Pruebe que $\nu$ verifica las hipótesis de (i) y por lo tanto cualquiera sea $g$ de clase $C^1$ se tendrá

$$\int_0^1 g'\,d\mu = \int_0^1 g\,d\nu = -\int_0^1 F(x) g'(x) dx$$

. Finalmente concluya que $d\mu = -F(x)\,dx$ y por lo tanto $\mu$ tiene una densidad con respecto a la medida de Lebesgue.

2 Supongamos que $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ es una función integrable tal que $\int_{\mathbb{R}^n} \phi(y)\,dy = 1$. Definamos $\phi_\epsilon(y) = \epsilon^{-n}\phi(y/\epsilon)$, para cada $\epsilon > 0$. Supongamos que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función medible y acotada que además es continua en $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Probaremos que

$$\lim_{\epsilon \to 0}(f * \phi_\epsilon)(x_0) = f(x_0).$$

Para ello descomponga

$$\begin{aligned} |(f * \phi_\epsilon)(x_0) - f(x_0)| \leq & \int_{\{y:|y|\leq a\}} |f(x_0 - y) - f(x_0)|\phi_\epsilon(y)\,dy \\ & + \int_{\{y:|y|>a\}} |f(x_0 - y) - f(x_0)|\phi_\epsilon(y)\,dy = A + B. \end{aligned}$$

Usando la continuidad de $f$ en $x_0$ pruebe que $A$ puede hacerse arbitrariamente pequeño tomando $a$ suficientemente pequeño. Para $a$ fijo pruebe que $B$ se puede hacer arbitrariamente pequeño tomando $\epsilon$ suficientemente pequeño.

# EXAMEN RECUPERATIVO

Prof. Jaime San Martín

Aux. Arturo Prat

**Pregunta 1** : Sea $M = \{\mu : \mu$ es medida con signo sobre $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ y $|\mu|(\mathbb{R}) < \infty\}$, donde $|\mu|$ es la variación de $\mu$. $M$ es un espacio de Banach con la norma $\|\mu\| := |\mu|(\mathbb{R})$. Para $\mu, \lambda \in M$ definiremos su convolución $\mu * \lambda$ como

$$(\mu * \lambda)(A) = (\mu \otimes \lambda)(A_2)$$

para todo $A \in \mathcal{B}$ y donde $A_2 := \{(x, y) : x + y \in A\} \subset \mathbb{R}^2$.

(a) Demuestre la fórmula

$$(\mu * \lambda)(A) = \int \mu(A - t) d\lambda(t)$$

$\forall \mu, \lambda \in M, \forall A \in \mathcal{B}$. (Aquí $A - t = \{x - t : x \in A\}$)
Recuerde que para medidas con signo $|\int f(x) d\mu(x)| \leq \int |f(x)| d|\mu|(x)$.

(b) Demostrar que $\mu * \lambda \in M$ y que $\|\mu * \lambda\| \leq \|\mu\|.\|\lambda\|$.

(c) Demostrar que $\mu * \lambda$ es la única medida $v \in M$ tal que

$$\int f dv = \int \int f(x + y) d\mu(x) d\lambda(y)$$

para toda función $f \in C_0(\mathbb{R})$

(d) Se dice que una medida con signo $\mu$ es discreta si está concentrada en un conjunto numerable; se dice que $\mu$ es continua si $\mu(\{x\}) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Sea $m$ la medida de Lebesgue en $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ (Observe que $m$ no pertenece a M). Demuestre las siguientes proposiciones para $\mu, \lambda \in M$

(i) Si $\mu$ y $\lambda$ son discretas, entonces $\mu * \lambda$ es discreta.

(ii) Si $\mu$ es continua, entonces $\mu * \lambda$ es continua.

(iii) Si $\mu << m$, entonces $\mu * \lambda << m$

(e) Suponga que $d\mu = f dm$ y $d\lambda = g dm$, con $f, g \in L^1(m, \mathbb{R})$, demuestre que $d(\mu * \lambda) = (f * g) dm$

**regunta 2** :

(i) Considere $(\Omega, \mathcal{F}, I\!P)$ un espacio de Probabilidades. Sea $A = \{X \in L^2(I\!P) : I\!E(X^2) \leq 1\}$ la bola unitaria de $L^2$. Pruebe que este conjunto es Uniformemente Integrable es decir

$$\lim_{a\to\infty} \sup_{X\in A} \int_{|X|>a} |X| dI\!P = 0.$$

(ii) Supongamos que $f$ es una función absolutamente continua en $[0, 1]$. Además supongamos que $g$ es una función Lipschitz es decir existe una constante $K < \infty$ tal que

$$\forall\, x, y \in I\!R \;\; |g(x) - g(y)| \leq K|x - y|.$$

Pruebe que la composición $g \circ f$ es absolutamente continua.

**NOTA** La pregunta 1 vale 60% y la 2 40%.

# EXAMEN ANALISIS II

Prof. Jaime San Martín

(1) (I) Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}_+$ medible. Denotemos por $\lambda$ la medida de Lebesgue. Pruebe que

(i) $\sum\limits_{k \geq 0} k\lambda\{k \leq f < k+1\} \leq \int\limits_0^1 f dx \leq \sum\limits_{k\geq 0} (k+1)\lambda\{k \leq f < k+1\}$

(ii) Deduzca que las siguientes son equivalentes

$f$ es integrable

$\sum\limits_{k\geq 1} \lambda\{k \leq f\} < \infty$

$\sum\limits_{k\geq 1} k\lambda\{k \leq f < k+1\} < \infty$

(II) Sea $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexa, se sabe que existen $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ tal que $\phi(x) = \sup\limits_n\{a_n x + b_n\}$. Pruebe que si $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ es integrable y $\phi(f) : [0,1] \to \mathbb{R}$ es integrable entonces $\int\limits_0^1 \phi(f)dx \geq \phi(\int\limits_0^1 f(x)dx)$.

(2) (i) Decimos que $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$ son congruentes si existe una rotación en ángulo $\alpha$

$$T_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{bmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T_\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

tal que $B = T_\alpha(A) = \{T_\alpha\binom{x}{y} / \binom{x}{y} \in A\}$. Pruebe que si $A$ es medible y $B$ es congruente con $A$ entonces $B$ es medible y $\lambda(A) = \lambda(B)$, donde $\lambda$ es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^2$. Sea $C = \{z \in \mathbb{R}^2 / 0 < \|z\| \leq 1\}$. Supongamos que existen $A_n \subseteq \mathbb{R}^2$ tal que $C = \bigcup\limits_{n\geq 1} A_n$, $A_n \cap A_m = \phi \quad n \neq m$ y $A_n, A_m$ son congruentes para todo $n, m$. Deducir que todos los $A_n$ son no medibles.

(ii) $E \subseteq \mathbb{R}^m$ se dice que es especial si

$$\mathbb{R}^m = \bigcup_{\ell \in \mathbb{Z}^m} (\ell + E) \text{ y } \forall \ell \neq \ell' \in \mathbb{Z}^m \quad (\ell + E) \cap (\ell' + E) = \phi.$$

(I) Probar que $D = [0,1)^m$ es especial

(II) Sea $D_\ell = \ell + D$, $\ell \in \mathbb{Z}^m$. Supongamos que $E$ es especial, consideremos $E_\ell = -\ell + E \cap D_\ell$ pruebe que $\bigcup\limits_{\ell \in \mathbb{Z}^m} E_\ell = D$. Deducir que si $E$ es medible entonces $\lambda(E) = 1$ donde $\lambda$ es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^m$.

(3) Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ espacio de medida finita. Decimos que una familia $\{f_n \ n \in I\!N\} \subseteq L^1(X, \mathcal{F}, \mu)$ es uniformemente integrable si

$$\lim_{a \to \infty} \sup_n \int \mathbb{1}_{|f_n|>a} |f_n| d\mu = 0$$

(i) Supongamos que existe $p > 1$ tal que $\sup_n \|f_n\|_p < \infty$. Pruebe que $\{f_n \ n \in I\!N\}$ es uniformemente integrable.
Indicación: Recuerde que $\mu(|f| > a) \leq \frac{1}{a^r} \int |f|^r d\mu$ para todo $a \geq 0$ y $r \geq 1$.

(ii) Supongamos que existe $f \in L^1(X, \mathcal{F}, \mu)$ tal que $|f_n| \leq f \ \forall n \in I\!N$. Pruebe que $\{f_n \ n \in I\!N\}$ es uniformemente integrable.

(iii) Supongamos que $(f_n)_{n \in I\!N}$ converge a 0 en medida, es decir $\forall \varepsilon > 0 \ \mu(\{|f_n| > \varepsilon\}) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$. Si además $\{f_n \ n \in I\!N\}$ es uniformemente integrable, entonces pruebe que

$$\int |f_n| d\mu \xrightarrow[n \to \infty]{} 0, \text{es decir } f_n \xrightarrow{L^1} 0.$$

Indicación: descomponga $\int |f_n| d\mu$ en 3 pedazos donde: $|f_n| > a, \varepsilon \leq |f_n| \leq a$ y $|f_n| < \varepsilon$.

1) Consideremos $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida finita con $\mu(X)=1$. Decimos que una secuencia $(f_n)$ de funciones medibles converge en medida a $f$ si $\forall \varepsilon>0 \quad \mu\{x : |f_n(x)-f(x)|>\varepsilon\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Notaremos por $f_n \xrightarrow{m} f$

(i) Pruebe que si $f_n \to f$ en $L^p$ $p\geq 1$ entonces $f_n \xrightarrow{m} f$

(ii) Probaremos que $f_n \xrightarrow{m} f$ sii $\forall (n_k)$ subsucesión $\exists (n_k')$ subsucesión de $(n_k)$ tal que $f_{n_k'} \to f$ $\mu$-c.t.p. Para ello le pueden ser útiles los 3 lemas siguientes.

<u>Lema 1</u>: Si $f_n \to f$ $\mu$-c.t.p $\Rightarrow f_n \xrightarrow{m} f$.

<u>Ind.</u> piense en $\mathbb{1}_{|f_n-f|>\varepsilon}$ donde $\varepsilon>0$

<u>Lema 2</u>: Supongamos que $(A_k)$ es una colección de conjuntos medibles tal que $\sum_{k\geq 1} \mu(A_k)<\infty$ entonces $\mu\left(\bigcap_k \bigcup_{m\geq k} A_m\right)=0$, o equivalentemente $\mu\left(\bigcup_k \bigcap_{m\geq k} A_m^c\right)=1$

<u>Lema 3</u>: $f_n \xrightarrow{m} f \Rightarrow \exists (n_k)$ $f_{n_k} \longrightarrow f$ $\mu$.c.t.p.

<u>Ind</u> tomar $\varepsilon_k = 1/k$ y $(n_k)$ tal que $\mu\{|f_{n_k}-f|>\frac{1}{k}\}\leq \frac{1}{k^2}$

y aplicar el lema 2 a $A_k=\{x : |f_{n_k}(x)-f(x)|>\frac{1}{k}\}$

(iii) tomar $([0,1], \mathcal{L}, \lambda)$ la medida de Lebesgue en $[0,1]$.

Consideremos $a_k=\sum_1^k \frac{1}{n} \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty$. Supongamos que $]a_k[$ denota la parte decimal de $a_k=[a_k]+]a_k[$

Sea $f_k = 1_{A_k}$ donde $A_k = \left( \lfloor a_k \rfloor, \lfloor a_k \rfloor + \frac{1}{k+1} \right) \cap [0,1]$

Pruebe que, $f_k \xrightarrow{m} f$ pero que $f_k \not\to f$ $\lambda$-c.t.p.

Concluya que la convergencia $\lambda$-c.t.p. no es metrizable.

No lo probaremos pero la convergencia en medida si es metrizable en las clases de equivalencia $\mu$-c.t.p.

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ como en ①.

(i) Si $f \geq 0$ es medible $\forall\ p \in [1, \infty)$ pruebe que

$$\sum_{n \geq 0} n^p \mu\{x : n \leq f < n+1\} \leq \int f^p d\mu \leq \sum_{n \geq 0} (n+1)^p \mu\{x : n \leq f < n+1\}$$

(ii) Si $f \in L^p$, $p \in [1, \infty)$ pruebe que

$$a^p \mu\{x : |f(x)| > a\} \xrightarrow[a \to \infty]{} 0$$

Ind. $a^p \mu\{x : |f(x)| > a\} \leq \int_{|f| > a} |f|^p d\mu$

(iii) Si $f$ es medible y $\exists\ q > 2$ tal que

$a^q \mu\{x : |f(x)| > a\} \xrightarrow[a \to \infty]{} 0$ entonces

$f \in L^p$ para $1 \leq p < q-1$

(iv) Concluir que $f \in \bigcap_{1 \leq p < \infty} L^p$ ssi

$\forall\ 1 \leq q < \infty \quad a^q \mu\{x : |f(x)| > a\} \xrightarrow[a \to \infty]{} 0$

(v) Dar un ejemplo donde $\bigcap_{1 \leq p < \infty} L^p \not\supseteq L^\infty$.

Sea $M_1(\mathbb{R})$ el conjunto de medidas de Probabilidad en $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Diremos que $(\mu_n) \subseteq M_1(\mathbb{R})$ converge a $\mu \in M_1(\mathbb{R})$ si $\forall f \in C(\mathbb{R})$, acotada $\int f\, d\mu_n \to \int f\, d\mu$. Denotaremos esta convergencia por $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$.

Notemos por $F_n(x) = \mu_n(-\infty, x]$ y $F(x) = \mu(-\infty, x]$.

(i) Pruebe que $\forall x \in \mathbb{R}$ $\overline{\lim_n} F_n(x) \leq F(x)$

Indicación : $f(y) = \begin{cases} 1 & y \leq x \\ 1 - \frac{(y-x)}{h} & x \leq y \leq x+h \\ 0 & y \geq x+h \end{cases}$

(ii) Pruebe que $\forall x \in \mathbb{R}$ $\underline{\lim_n} F_n(x) \geq F(x-)$

(iii) Concluya que si $x$ es punto de continuidad de $F$ entonces $\lim_n F_n(x) = F(x)$.

(iv) El propósito es probar que la recíproca de (iii) es cierto. Sea $f$ continua $\geq 0$. $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ compacto donde $a$ y $b$ son puntos de cont. de $f$.
Para $\varepsilon > 0$ pruebe que existe partición finita :

$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = b$ tal que $(x_i)$ son puntos de continuidad de $F$ $|x_i - x_{i-1}| < \varepsilon$.

Ind. piense que $F$ es continua salvo un conjunto numerable y por lo tanto en un denso.

Pruebe que $\int f\, d\mu_n \geq \sum_{i=0}^{k} \left( \min_{x_i < x \leq x_{i+1}} f(x) \right) \cdot F_n(x_{i+1}) - F_n(x_i)$

y concluya que $\underline{\lim_n} \int f\, d\mu_n \geq \int_a^b f(x)\, d\mu(x)$

Haga $\begin{matrix} a \to \infty \\ b \to \infty \end{matrix}$ para concluir $\underline{\lim_n} \int f\, d\mu_n \geq \int f(x)\, d\mu(x)$

Finalmente concluya que si $F_n(x) \to F(x)$ para todo punto de cont. de $F$ entonces $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$.

(2) Pruebe que existe una única medida de probabili[dad] $\mathbb{P}$ en $(\mathbb{R}^T, \mathcal{B}^T)$ con $T = (0,1]$, tal que si

$t_1 < t_2 < \dots < t_n$

$$\mathbb{P}[(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \in A] = \int_A \left( \prod_{i=2}^{n} \frac{e^{-\frac{(x_i - x_{i-1})^2}{2(t_i - t_{i-1})}}}{\sqrt{2\pi(t_i - t_{i-1})}} \right) \frac{e^{-\frac{x_1^2}{2t_1}}}{\sqrt{2\pi t_1}} \, dx_1 \dots d$$

donde $X_t : \mathbb{R}^T \to \mathbb{R}$

$\omega \longrightarrow X_t(\omega) = \omega(t)$.

Pruebe que $\mathbb{E}(X_t) = 0$

$\mathbb{E}((X_t - X_s)^2) = |t-s|$

(3) Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ espacio de medida finita. Decimos que una familia $\{f_n \ n \in \mathbb{N}\} \subseteq L^1(X, \mathcal{F}, \mu)$ es uniformemente integrable si

$$\lim_{a \to \infty} \sup_n \int \mathbb{1}_{|f_n|>a} |f_n| d\mu = 0$$

(i) Supongamos que existe $p > 1$ tal que $\sup_n \|f_n\|_p < \infty$. Pruebe que $\{f_n \ n \in \mathbb{N}\}$ es uniformemente integrable.
Indicación: Recuerde que $\mu(|f| > a) \leq \frac{1}{a^r} \int |f|^r d\mu$ para todo $a \geq 0$ y $r \geq 1$.

(ii) Supongamos que existe $f \in L^1(X, \mathcal{F}, \mu)$ tal que $|f_n| \leq f \ \forall n \in \mathbb{N}$. Pruebe que $\{f_n \ n \in \mathbb{N}\}$ es uniformemente integrable.

(iii) Supongamos que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a 0 en medida, es decir $\forall \varepsilon > 0 \ \mu(\{|f_n| > \varepsilon\}) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$. Si además $\{f_n \ n \in \mathbb{N}\}$ es uniformemente integrable, entonces pruebe que

$$\int |f_n| d\mu \xrightarrow[n \to \infty]{} 0, \text{es decir } f_n \xrightarrow{L^1} 0.$$

Indicación: descomponga $\int |f_n| d\mu$ en 3 pedazos donde: $|f_n| > a, \epsilon \leq |f_n| \leq a$ y $|f_n| < \epsilon$.

---

(2) (i) Decimos que $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$ son congruentes si existe una rotación en ángulo $\alpha$

$$T_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{bmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T_\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

tal que $B = T_\alpha(A) = \{T_\alpha\binom{x}{y} / \binom{x}{y} \in A\}$. Pruebe que si $A$ es medible y $B$ es congruente con $A$ entonces $B$ es medible y $\lambda(A) = \lambda(B)$, donde $\lambda$ es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^2$. Sea $C = \{z \in \mathbb{R}^2 / 0 < \|z\| \leq 1\}$. Supongamos que existen $A_n \subseteq \mathbb{R}^2$ tal que $C = \bigcup_{n \geq 1} A_n, A_n \cap A_m = \phi \quad n \neq m$ y $A_n, A_m$ son congruentes para todo $n, m$. Deducir que todos los $A_n$ son no medibles.
(ii) $E \subseteq \mathbb{R}^m$ se dice que es especial si

$$\mathbb{R}^m = \bigcup_{\ell \in \mathbb{Z}^m} (\ell + E) \text{ y } \forall \ell \neq \ell' \in \mathbb{Z}^m \ \ (\ell + E) \cap (\ell' + E) = \phi.$$

(I) Probar que $D = [0, 1)^m$ es especial
(II) Sea $D_\ell = \ell + D$, $\ell \in \mathbb{Z}^m$. Supongamos que $E$ es especial, consideremos $E_\ell = -\ell + E \cap D_\ell$ pruebe que $\bigcup_{\ell \in \mathbb{Z}^m} E_\ell = D$. Deducir que si $E$ es medible entonces $\lambda(E) = 1$ donde $\lambda$ es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^m$.

**EXAMEN**

Prof. Jaime San Martín

Aux. Arturo Prat

**Pregunta 1** : Consideremos $(\Omega, \mathcal{F}, I\!P)$ un espacio de Probabilidades. Diremos que una secuencia de variables aleatorias $(X_n)$ converge en distribución a $X$ variable aleatoria si para cualquier función $f : I\!R \to I\!R$ continua acotada se tiene

$$\lim_{n\to\infty} I\!E(f(X_n)) = I\!E(f(X)).$$

Diremos además que $(X_n)$ es uniformemente integrable (UI) si

$$\lim_{a\to\infty} \sup_n I\!E(|X_n| 1_{\{|X_n|\geq a\}}) = 0.$$

Pruebe que si $(X_n)$ converge en distribución a $X$ y si $(X_n)$ es UI entonces $X^+$ es integrable y

$$\lim_{n\to\infty} I\!E(X_n^+) = I\!E(X^+).$$

Pruebe finalmente que bajo las mismas hipótesis se tiene: $X$ es integrable y

$$\lim_{n\to\infty} I\!E(X_n) = I\!E(X).$$

Indicación: utilice una truncación de la parte positiva como la siguiente

$$\phi_r(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq r \\ r & r \leq x \\ 0 & x \leq 0 \end{cases},$$

**Pregunta 2** : Sea $f : I\!R^n \to I\!R$ una función integrable. Definimos la función maximal como

$$M(f)(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y)|dy,$$

donde $B(x,r)$ es la bola de centro $x$ de radio $r$, y $m(\bullet)$ es la medida de Lebesgue en $I\!R^n$. Probaremos que existe una constante $A$ que sólo depende de la dimensión tal que

$$m(\{x : M(f)(x) > \alpha\}) \leq \frac{A}{\alpha} \int |f(y)|dy.$$

(Se dice en análisis que la función maximal es weak-type (1,1)).

(i) Para probar este teorema se necesita el siguiente lema. Supongamos que el conjunto medible $E$ es cubierto por una colección de bolas $\mathcal{B} = \{B_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ cuyos radios están uniformemente acotados: $\sup\{rad(B_\lambda) : \lambda \in \Lambda\} < \infty$. Probaremos que existe una subcolección numerable y disjunta $(B_k) \subseteq \mathcal{B}$ tal que

$$m(E) \leq 5^n \sum_k m(B_k).$$

Para ello considere el siguiente procedimiento inductivo: tome $B_1$ cualquier bola de $\mathcal{B}$ tal que $rad(B_1) \geq 1/2 \sup\{rad(B_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$. Una vez definidos $B_1, ..., B_k$ tomemos si es que existe $B_{k+1}$ disjunta de las anteriores y tal que $rad(B_{k+1}) \geq 1/2 \sup\{rad(B_\lambda) : \lambda \in \Lambda$ y $B_\lambda$ disjunta de $B_1, ..., B_k\}$. Este procedimiento en principio podría ser infinito. En el caso que $\sum_k m(B_k) = \infty$ no hay nada que probar. En caso contrario supondremos que $\sum_k m(B_k) < \infty$ y en particular $rad(B_k) \to 0$. Para cada $k$ consideremos $B_k^*$ la bola de centro el mismo que $B_k$ y radio 5 veces mayor. Demuestre que para cada $B_\lambda$ existe un $k$ tal que $B_\lambda \subseteq B_k^*$. Razone por contradicción tome j el menor índice tal que $B_j$ intersecta a $B_\lambda$ (por qué existe?) y use la forma como fue elegida $B_j$.

(ii) Probaremos ahora el teorema. Si $M(f)(x) > \alpha$, encuentre una bola $B(x,r)$ tal que $m(B(x,r)) \leq \frac{1}{\alpha} \int_{B(x,r)} |f(y)|dy$ y aplique el lema.

Recuerde que $m(B(x,r)) = m(B(0,1))r^n$.

1

# Examen Recuperativo

Julio, 2002

Prof. Jaime San Martín

Aux. Ricardo Menares

**Pregunta 1:** Consideremos $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, \mu)$ la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$. Diremos que una familia $\mathcal{I}$ de intervalos cerrados, acotados y de interior no vacíos, es un recubrimiento de Vitali de $E \in \mathcal{L}$ si

$$\forall x \in E\ \forall \epsilon > 0\ \exists I \in \mathcal{I}\quad x \in I \text{ con } \mu(I) \leq \epsilon.$$

Supongamos que $0 < \mu(E) < \infty$, probaremos que hay una subfamilia $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}$ tal que: $\mathcal{J} = (I_k)_k$ es a lo más numerable, los intervalos en $\mathcal{J}$ son disjuntos y

$$\mu(E \setminus \bigcup_k I_k) = 0.$$

Para ello partimos fijando $\theta$, un abierto de medida finita, tal que $E \subset \theta$. Tomemos $I_1$ cualquiera en $\mathcal{I}$ tal que $I_1 \subset \theta$ (¿hay alguno?). Si $\mu(E \setminus I_1) = 0$ paramos, sino construiremos $I_2$. El procedimiento inductivo es como sigue: supongamos construidos $I_1, ..., I_n \subset \theta$ disjuntos y tal que

$$\mu(E \setminus \bigcup_{k=1}^{n} I_k) > 0.$$

Denotemos por $R_n = E \setminus \bigcup_{k=1}^{n} I_k$ y definamos $G_n = \theta \setminus \bigcup_{k=1}^{n} I_k$. Pruebe que la familia $\{I \in \mathcal{I} : I \subset G_n\}$ es no vacía y que

$$0 < \kappa_n := \sup\{\mu(I) :\ I \in \mathcal{I},\ I \subset G_n\} < \infty.$$ 1 pto

Tomemos $I_{n+1} \in \{I \in \mathcal{I} : I \subset G_n\}$ cualquiera tal que $\mu(I_{n+1}) \geq \kappa_n/2$.

Consideremos sólo el caso en que este procedimiento no para en un número finito de iteraciones esto es $\forall n\ \mu(R_n) > 0$. Para cada intervalo $I_k$ definimos el intervalo $J_k$ de mismo centro pero 5 veces más largo. Pruebe que $\kappa_n \to 0$, que se satisface la inclusión: 1 pto

$$\forall n \geq 1 \quad R_n = E \setminus \bigcup_{k=1}^{n} I_k \subset \bigcup_{l=n+1}^{\infty} J_l,$$ 3 pto

y concluya el resultado. 1 pto

Para probar la inclusión le puede ser útil considerar $x \in R_n \subset G_n$ y $J \in \{I \in \mathcal{I} : I \subset G_n\}$ tal que $x \in J$. Pruebe que debe existir un primer $m > n$ tal que $J \notin \{I \in \mathcal{I} : I \subset G_m\}$.

**Pregunta 2:**

(i) Consideremos $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida finita y $f \in L^{\infty}$ una función positiva tal que $0 < \|f\|_{\infty}$. Se definen $\alpha_n = \int (f(x))^n \, d\mu(x)$. Pruebe que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \|f\|_{\infty}.$$

(ii) En lo que sigue consideremos $([0,1], \mathcal{L}, dx)$. Diga si las afirmaciones siguientes son ciertas o falsas y en cada caso pruebela o de un contraejemplo según corresponda:

(1) La convergencia casi segura de funciones de $L^1$ a una función de $L^1$ implica la convergencia en $L^1$.

(2) Si un conjunto medible tiene medida positiva entonces tiene interior no vacío.

(3) Si un conjunto tiene medida 0 entonces es numerable.

(4) $\bigcap_{1 \leq p < \infty} L^p = L^{\infty}$

(5) Sea $A \in \mathcal{L}$ que verifica: para todo $I$ intervalo abierto en $[0,1]$, no vacío, se tiene $\mu(A \cap I) > \frac{1}{2}\mu(I)$. Necesariamente se tiene $\mu(A) = 1$.