Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

Auxiliar Teoría de la Medida

Profesor: Jaime San Martín
Auxiliares: Cristobal Guzmán, Andrés Fielbaum

Pregunta 1 *(Medidas Exteriores Métricas)*
Sea (X, d) espacio métrico, μ^* una medida exterior. Supondremos además que es *métrica*, i.e., que verifica: $\forall A, B \subset X, d(A, B) > 0 \Rightarrow \mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$.
Probaremos que entonces todo boreliano es μ^*-medible. Para ello:

(i) Sean $A, F \subset X$, con F un conjunto cerrado. Definamos los conjuntos $B_n = \{x \in A \setminus F : d(x, F) \geq \frac{1}{n}\}$. Verifique que $\cup_{n\in\mathbb{N}} B_n = A \setminus F$, $\lim_n \mu^*(B_n) \leq \mu^*(A \setminus F)$ y pruebe que $\forall n \in \mathbb{N}, \mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap F) + \mu^*(B_n)$.
(ii) Sea $C_n = B_{n+1} \setminus B_n$. Muestre que $d(C_{n+2}, B_n) \geq \frac{1}{n(n+1)} > 0$.
(iii) Concluya que $\mu^*(A \setminus F) = \lim_n \mu^*(B_n)$. Para ello, suponga que $\lim_n \mu^*(B_n) < \infty$, pruebe que entonces $\sum_n \mu^*(C_n) < \infty$ y concluya. Concluya el teorema.
(iv) Pruebe que la recíproca del teorema también es cierta: si todo boreliano es μ^*-medible, entonces la medida exterior es métrica.

Pregunta 2
Sea X un conjunto, $\tau \subset \mathcal{P}(X)$ un álgebra, sea $\mathcal{B} = \sigma(\tau)$, y sea μ una medida finita sobre $\mathcal{B}$. Demuestre que $\forall \varepsilon > 0, \forall B \in \mathcal{B}\ \exists A \in \tau$ tal que $\mu(A \triangle B) < \varepsilon$.