Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

Auxiliar Teoría de la Medida: La Medida de Hausdorff

Profesor: Jaime San Martín
Auxiliares: Cristobal Guzmán, Andrés Fielbaum

Sean $N \in \mathbb{N}$, $s, \varepsilon > 0$. Definimos $H^s_\varepsilon : \mathcal{P}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}^+$, por

$$H^s_\varepsilon(A) = V(s)\,\text{ínf}\{\sum_{i\in\mathbb{N}} (\delta(C_i)/2)^s : A \subseteq \bigcup_i C_i, \delta(C_i) < \varepsilon\ \forall i\}$$

Donde $\delta(A) = \sup_{x,y\in A} ||x-y||$ es el diámetro del conjunto A, y $V(s) = \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma(1+\frac{s}{2})}$ representa, para s natural, el volumen de la bola unitaria s-dimensional. A un recubrimiento $(C_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de diámetro $< \varepsilon$ lo llamaremos un ε-recubrimiento de A.

(i) Defina $H^s(A) = \text{lím}_{\varepsilon\to 0^+} H^s_\varepsilon(A)$ (¿por qué existe?). A esta función se le conoce como la **Medida de Hausdorff s-dimensional**. Pruebe que H^s es una medida exterior.
(ii) Pruebe que la σ-álgebra de conjuntos H^s-medibles contiene a los Borelianos.
(iii) Pruebe que H^0 es la medida cuentapuntos.
(iv) Pruebe que, para $N = 1$, H^1 es la medida de Lebesgue usual.
Se demuestra que, de hecho, $\forall N \geq 1$, H^N coincide en $\mathbb{R}^N$ con la medida de Lebesgue N-dimensional usual.
(v) Pruebe que H^1 no es σ-finita en $\mathbb{R}^2$. *Hint: Pruebe que* $H^1(\{(x,y) : 0 \leq x \leq 1, y = 0\}) = 1$.
(vi) Pruebe que si $H^s(A) < \infty$, entonces $H^t(A) = 0 \forall t > s$.
(vii) Pruebe que si $H^s(A) > 0$, entonces $H^t(A) = \infty \forall t < s$.

Lo anterior motiva la siguiente definición: la **Dimensión de Hausdorff** de A se define como $dim_H(A) = \text{ínf}\{s \in [0,\infty) : H^s(A) = 0\}$.

(viii) Sea A numerable. Calcule su dimensión de Haussdorf.
(ix) Sea K el conjunto de Cantor usual en $\mathbb{R}$. Calcule su dimensión de Hausdorff, y para esa dimensión, su medida de Hausdorff.