Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

Auxiliar Teoría de la Medida

Profesor: Jaime San Martín
Auxiliares: Cristobal Guzmán, Andrés Fielbaum

Pregunta 1

Sea $(X, \mathcal{B}, \mu)$ espacio de medida finita. Defina sobre $\mathcal{B}$ la aplicación $d(A, B) = \mu(A \triangle B)$, que resulta ser distancia sobre $\mathcal{B} \backslash \mathcal{R}$, donde $A\mathcal{R}B$ ssi $d(A, B) = 0$ *Propuesto: verificar que d está bien definida sobre $\mathcal{B} \backslash \mathcal{R}$ y que define una distancia* . Pruebe que $(\mathcal{B} \backslash \mathcal{R}, d)$ es separable $\Leftrightarrow$ $L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ lo es. Probar además que $(\mathcal{B} \setminus \mathcal{R}, d)$ es siempre completo.

Pregunta 2 *(Teorema de Convergencia de Vitali)*

Sea $(X, \mathcal{B}, \mu)$ espacio de medida finito. Una familia $\mathcal{H}$ de funciones integrables se dice *Uniformemente Integrable* (U.I.) si $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $\forall f \in \mathcal{H}, \forall A \in \mathcal{B}, \mu(A) < \delta \Rightarrow \int_A |f| d\mu < \epsilon$.
(i) Pruebe que si $\mathcal{H}$ es una familia finita, entonces es U.I.
Sean ahora $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles. Decimos que f_n *converge en medida* a f medible ssi $\forall \epsilon > 0, \mu(\{x : |f_n(x) - f(x)| > \epsilon\}) \to 0$ cuando $n \to \infty$. Lo notaremos $f_n \to^{\mu} f$.
(ii) Pruebe que la convergencia en medida es más débil que la convergencia c.t.p.
(iii) (Teo. de Vitali) Sean $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ funciones integrables, f medible. Pruebe que $f \in L^1$ y $f_n \to^{L^1} f \Leftrightarrow \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ es U.I. y $f_n \to^{\mu} f$.
(iv) Pruebe que el teorema de convergencia dominada, en el caso de medida finita, se deduce como corolario del teorema de Vitali.
(v) Más aún, pruebe que para el T.C.D., la hipótesis $f_n \to f$ ctp se puede cambiar por $f_n \to f$ en medida.