MA3801 Teoría de la Medida. Semestre 2009-02
Profesor: Jaime San Martín **Auxiliares:** Andrés Fielbaum y Cristóbal Guzmán

Clase auxiliar 7

21 de Septiembre de 2009

1. Convergencia en medida

En el teorema de convergencia de Vitali se ha introducido una nueva noción: la convergencia en medida. Ésta definición puede resultar útil en casos de no tener convergencia ctp. En esta sección estudiaremos cómo esta convergencia entrega resultados de convergencia de integrales similares a los vistos durante el capítulo.

Durante la sección se considera un espacio de medida completo $(X, \mathcal{F}, \mu)$, con $\mu(X) = 1$.

DEFINICIÓN 1.1. *Sea $(f_n)_n$ una sucesión de funciones medibles. Se dice que f_n converge en medida, denotado por $f_n \xrightarrow{\mu}$, si*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n\to\infty} \mu\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} = 0.$$

Análogamente, se dice que f_n es de Cauchy en medida si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \geq N_0 \quad \mu\{x : |f_n(x) - f_m(x)| \geq \varepsilon\} < \varepsilon.$$

Notar que para calcular la diferencia en la definición, es necesario que ambas funciones sean finitas μ-ctp. Por lo tanto lo natural es considerar el espacio $L^0(X, \mathcal{F}, \mu)$ de las funciones medibles a valores reales, cuocientado por la equivalencia de la igualdad μ-ctp. Este espacio puede ser dotado de la siguiente métrica:

$$d(f,g) = \int \frac{|f-g|}{1+|f-g|} d\mu.$$

PROPOSICIÓN 1.2. *$(L^0(X, \mathcal{F}, \mu), d)$ es un espacio métrico completo, y su distancia metriza la convergencia en medida.*

Demostración. Veamos que es métrica: la simetría y positividad son directas. Para la implicancia

$$d(f,g) = 0 \quad \Rightarrow \quad f = g$$

es necesario observar que si la integral que define d es 0, necesariamente el numerador $|f(x) - g(x)|$ es nulo c.t.p. (el denominador no puede ser infinito); y dado que L^0 está definido por la equivalencia c.t.p., f y g son iguales.

Falta ahora la desigualdad triangular: por la monotonía de $t/(1+t)$

$$|f-g| \leq |f-h| + |h-g| \quad \mu-\text{c.t.p.} \quad \Rightarrow \quad \frac{|f-g|}{1+|f-g|} \leq \frac{|f-h|+|h-g|}{1+|f-h|+|h-g|} \quad \mu-\text{c.t.p.},$$

entonces

$$\begin{aligned}\frac{|f-g|}{1+|f-g|} \quad &\leq \quad \frac{|f-h|}{1+|f-h|+|h-g|} + \frac{|h-g|}{1+|f-h|+|h-g|} \\ &\leq \quad \frac{|f-h|}{1+|f-h|} + \frac{|h-g|}{1+|h-g|},\end{aligned}$$

lo que prueba la desigualdad triangular. En consecuencia d es métrica.
Probemos ahora que d metriza la convergencia en medida. Sea entonces $(f_n)_n \subseteq L^0$:

- Si $f_n \xrightarrow{\mu} f$, entonces acotamos la integral. Para esto se usarán 2 propiedades de la función $t \to \frac{t}{1+t}$: qué está acotada entre 0 y 1, y que es monótona creciente.

$$\begin{aligned} d(f_n, f) &= \int \frac{|f_n - f|}{1 + |f_n - f|} d\mu \\ &= \int_{\{|f_n - f| > \varepsilon\}} \frac{|f_n - f|}{1 + |f_n - f|} + \int_{\{|f_n - f| \leq \varepsilon\}} \frac{|f_n - f|}{1 + |f_n - f|} \\ &\leq \int_{\{|f_n - f| > \varepsilon\}} 1 \, d\mu + \int_{\{|f_n - f| \leq \varepsilon\}} \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} \\ &= \mu\{|f_n - f| > \varepsilon\} + \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon}. \end{aligned}$$

  Luego, si queremos que esta cantidad sea menor que $\eta > 0$ arbitrario, basta escoger ε tal que $\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} < \frac{\eta}{2}$, y luego escoger n_0 tal que para todo $n \geq n_0$, $\mu\{|f_n - f| > \varepsilon\} \leq \frac{\eta}{2}$. Con esto se prueba que $f_n \xrightarrow{d} f$.

- Si $f_n \xrightarrow{d} f$, probaremos que converge en medida. Sea $\varepsilon > 0$, entonces

$$\begin{aligned} \mu\{|f_n - f| > \varepsilon\} &= \int_{\{|f_n - f| > \varepsilon\}} 1 \, d\mu \\ &\leq \frac{1 + \varepsilon}{\varepsilon} \int \frac{|f_n - f|}{1 + |f_n - f|} \, d\mu, \end{aligned}$$

  donde la desigualdad proviene de la monotonía de $t/(1+t)$ y luego se acota 1 por el cuociente $\frac{|f_n - f|}{1+|f_n - f|} \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}$. Finalmente, dado $\eta > 0$, si escogemos n_0 tal que para todo $n \geq n_0$, $d(f_n, f) < \eta \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$ se tiene que la medida es menor que η, lo que prueba la convergencia en medida.

Para finalizar, veamos que el espacio es completo: sea $(f_n)_n$ de Cauchy para d, lo que claramente implica que es de Cauchy en medida (siguiendo la misma idea de la metrizabilidad). En consecuencia, es posible extraer una subsucesión $(f_{n_k})_k$, tal que para todo k

$$\mu\{|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}| > \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}\} < \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}.$$

Luego, sea el conjunto

$$A \doteq \bigcup_k \{|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}| > \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}\}$$

El cual por subaditividad tiene medida menor a ε. Sobre el complemento de A se tiene la convergencia de la serie $\sum_k |f_{n_k} - f_{n_{k+1}}|$, lo cual indica que en dicho conjunto f_{n_k} converge puntualmente a una función medible f. Utilizando nuevamente la condición de Cauchy, tenemos que dado $\varepsilon > 0$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$, tal que para todo $n, m \geq N_0$

$$\mu\{x : |f_n(x) - f_m(x)| \geq \varepsilon\} < \varepsilon.$$

Esto implica que sobre el complemento, escogiendo $m = n_k$ y tomando límite en k

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

y por ende $\mu\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} < \varepsilon$. Como además ε es arbitrario, en particular $f \in L^0$. $\square$

La siguiente proposición muestra cómo se relaciona la convergencia en medida con la convergencia ctp.

Proposición 1.3. *Sea* $(f_n)_n \subseteq L^0(X, \mathcal{F}, \mu)$. *Entonces*

a) Si f_n *converge* μ*-ctp a* f*, entonces* f_n *converge en medida a* f*.*

b) Si f_n *converge en medida a* f*, entonces existe una subsucesión* n_k *tal que* $f_{n_k} \to f$ μ*-ctp.*

Cabe señalar que en la segunda parte de la proposición no es posible convertir la subsucesión en la sucesión completa, lo cual se deja como ejercicio. Ésto último permite probar que la convergencia μ-ctp no es metrizable en general.

Demostración. Sea $(f_n)_n \subseteq L^0$ tal que $f_n \xrightarrow{ctp} f$. Usaremos la métrica d y el Teorema de Convergencia Dominada para concluir, en efecto:

- $|f_n - f| \xrightarrow{ctp} 0$. Esto implica también $\dfrac{|f_n - f|}{1 + |f_n - f|} \xrightarrow{ctp} 0$.
- $\left|\dfrac{|f_n - f|}{1 + |f_n - f|}\right| \leq 1$ μ-ctp, y como μ es finita, $1 \in L^1$.

En consecuencia

$$\int \frac{|f_n - f|}{1 + |f_n - f|}\, d\mu \to 0.$$

Probaremos ahora la recíproca vía subsucesión. Si suponemos que f_n converge en medida a f, usando la convergencia dada por la métrica d, tendremos por la recíproca del TCD (teorema **??**) que la sucesión $g_n = \frac{|f_n - f|}{1+|f_n - f|}$ posee una subsucesión n_k tal que $g_{n_k} \xrightarrow{ctp} 0$, con lo cual necesariamente $f_{n_k} \xrightarrow{ctp} f$. □

Existe además una caracterización de la convergencia ctp en función de la convergencia en medida, como veremos a continuación.

Proposición 1.4. *Sea* $(f_n)_n \subseteq L^0$. *Entonces* f_n *converge* μ*-ctp a* f *si y sólo si la sucesión*

$$g_n = \sup_{k \geq n} |f_k - f|$$

converge en medida a 0. En particular, si $(f_n)_n$ *es monónota la convergencia ctp y en medida de* $(f_n)_n$ *son equivalentes.*

Demostración. Sea $f_n \xrightarrow{ctp} f$. Entonces por el lema de Fatou

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}(g_n > \varepsilon) \leq \int \limsup_{n\to\infty} \mathbb{1}_{\{g_n > \varepsilon\}}\, d\mu.$$

Notamos también que

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{1}_{\{g_n > \varepsilon\}} = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad (\forall n)\,(\exists k \geq n) \quad g_n > \varepsilon.$$

Sin embargo, como g_n es monótona decreciente, basta con que para algún n_0, g_{n_0} sea menor a ε para que el límite valga 0. Por otra parte, como f_n converge ctp a f, es claro que lo anterior ocurre μ-ctp, con lo cual

$$\int \limsup_{n\to\infty} \mathbb{1}_{\{g_n > \varepsilon\}}\, d\mu = 0.$$

Para la recíproca, si $g_n \xrightarrow{\mu} 0$, existe una subsucesión $g_{n_k} \xrightarrow{ctp} 0$. Luego, existe A de medida 1 tal que

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists n_k)\,(\forall j \geq k) \quad g_{n_j}(x) = \sup_{m \geq n_j} |f_m(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in A,$$

lo que implica

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists n_0)\,(\forall m \geq n_0) \quad |f_m(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in A,$$

es decir, $f_n \xrightarrow{ctp} f$.

□

El objetivo ahora es generalizar el TCD para sucesiones que convergen en medida. Para esto comenzamos con un lema.

Lema 1.5. *Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ espacio de medida y $f \in L^1(X, \mathcal{F}, \mu)$. Entonces la integral es μ-continua, en el sentido siguiente*

$$\lim_{\mu(A) \to 0} \int_A |f| \, d\mu = 0$$

Notar que este resultado es el mismo que se enunció en la tercera parte de la proposición **??**, para el caso de un singleton; por lo tanto ya está demostrado.
Una consecuencia del lema es el siguiente

Corolario 1.6. *Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ espacio de medida: sean $0 \leq f_n \leq g$, donde $f_n, g : X \to \bar{\mathbb{R}}_+$ son medibles, con $f_n \xrightarrow{\mu} 0$. Entonces, si g es integrable,*

$$\int f_n \, d\mu \to 0$$

Demostración. Sea $\delta > 0$ a determinar, para el cual se define $A_n = \{x : f_n(x) \geq \delta\}$; entonces por hipótesis $\mu(A_n) \to 0$. También definimos $F_k = \{x : 1/k \leq g(x) \leq k\}$, que satisface $F_k \subseteq F_{k+1}$, y por la desigualdad de Markov (ejercicio **??**)

$$\mu(F_k) \leq \mu\{g(x) \geq \frac{1}{k}\} \leq k\|g\|_1 < +\infty.$$

Notemos que además $F_k \nearrow F \doteq \{x : g(x) > 0\}$, lo que por el TCD implica

$$\int_{F \setminus F_k} g \, d\mu \to 0.$$

Ahora, dado $\varepsilon > 0$, se escoge k_0 tal que para todo $k \geq k_0$ $\displaystyle\int_{F \setminus F_k} g \, d\mu < \varepsilon/3$. También se escoge $\delta > 0$ tal que $\mu(F_{k_0}) \leq \varepsilon/3\delta$.
Ahora se acota la integral de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
\int_X f_n \, d\mu &= \int_{A_n} f_n \, d\mu + \int_{A_n^c \cap F_{k_0}} f_n \, d\mu + \int_{A_n^c \cap F_{k_0}^c} f_n \, d\mu \\
&\leq \int_{A_n} g \, d\mu + \delta \mu(F_{k_0} \cap A_n^c) + \int_{F \cap A_n^c \cap F_{k_0}^c} g \, d\mu \\
&\leq \int_{A_n} g \, d\mu + \delta \frac{\varepsilon}{2\delta} + \int_{F \setminus F_{k_0}} g \, d\mu \\
&\leq \int_{A_n} g \, d\mu + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}.
\end{aligned}$$

En el último término de la primera desigualdad, hemos intersectado con F, pues sobre el complemento g es identicamente nula.

Para finalizar, como $f_n \xrightarrow{\mu} 0$, escogemos n tal que A_n tenga medida pequeña, para la cual el lema entregue $\displaystyle\int g\,d\mu < \varepsilon/3$. Esta cota puede utilizarse en la desigualdad anterior, concluyendo que

$$\int_X f_n\,d\mu < 3\,\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

demostrando lo pedido. $\square$

A continuación, presentamos una nueva versión del TCD, la cual sólo requiere convergencia en medida.

Teorema 1.7. *Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ espacio de medida, y $f_n, f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ medibles, tales que $f_n \xrightarrow{\mu} f$. Si existe $g \in L^1(X, \mathcal{F}, \mu)$, tal que $|f_n| \leq g$, entonces $f_n \to f$ en $L^1(X, \mathcal{F}, \mu)$.*

Demostración. Sea n_k una subsucesión tal que $f_{n_k} \to f$ ctp, por lo que tomando límite $|f| \leq g$. Observando que $|f_n - f| \xrightarrow{\mu} 0$ y

$$|f_n - f| \leq 2g \in L^1,$$

se deduce del corolario anterior que $|f_n - f| \to 0$ en L^1; es decir $f_n \to f$ en L^1. $\square$