MA3801 Teoría de la Medida. Semestre 2009-02
Profesor: Jaime San Martín **Auxiliares:** Andrés Fielbaum y Cristóbal Guzmán

Forma funcional del teorema de la clase monótona

31 de Agosto de 2009

En esta sección consideramos el problema de saber cuando una cierta clase de funciones contiene a la familia de funciones medibles y acotadas. Este hecho resulta ser de importancia para muchas aplicaciones, como se verá al final de la sección. Para ésto partiremos con una definición necesaria.

Definición 0.1. *Sea X un conjunto y $\mathbb{B}(X)$ el espacio vectorial de funciones acotadas $f : X \to \mathbb{R}$. Diremos que $\mathcal{H} \subseteq \mathbb{B}(X)$ es un espacio vectorial monótono (en adelante EVM), si es un espacio vectorial que satisface las siguientes condiciones*

- *$\mathcal{H}$ contiene a las constantes.*
- *Para toda sucesión $(f_n)_n \subseteq \mathcal{H}$ no decreciente tal que $\sup_n \|f_n\|_\infty < +\infty$, se tiene que $f \doteq \lim_n f_n$ pertenece a $\mathcal{H}$.*

Partiremos con un lema de análisis funcional que dará más generalidad al resultado.

Lema 0.1 (Atkinson). *Todo EVM $\mathcal{H}$ es cerrado para la convergencia uniforme*

Demostración. Sea $(f_n)_n \subseteq \mathcal{H}$ con $f_n \to f$ uniforme sobre X. Consideramos una subsucesión n_k tal que $\epsilon_k \doteq \|f_{n_{k+1}-f_{n_k}}\|$ sea sumable. Esto implica que la sucesión $a_k = \sum_{j\geq k} \epsilon_k$ tiende a cero.

Definimos ahora

$$g_k \doteq f_{n_k} - a_k + 2a_1,$$

la cual satisface que para todo $k \in \mathbb{N}$, $g_k \in \mathcal{H}$, puesto que $\mathcal{H}$ contiene a las constantes. Por otro lado, g_k es uniformemente acotada; en efecto

$$\|f_{n_k}\|_\infty \leq C, \quad |a_k| \to 0, \quad |2a_1| \leq M.$$

Además, g_k es una sucesión creciente, pues

$$g_{k+1} - g_k = f_{n_{k+1}} - f_{n_k} + \epsilon_k \geq 0,$$

lo que implica que $g \doteq \lim_k g_k \in \mathcal{H}$. La demostración termina observando que

$$f = g - 2a_1 \in \mathcal{H}.$$

□

Ahora enunciamos el resultado principal de la sección

Teorema 0.1 (Forma funcional del Teorema de la Clase Monótona). *Sea $\mathcal{H} \subseteq \mathbb{B}(X)$ un EVM y $\mathcal{H}_0 \subseteq \mathcal{H}$ una clase cerrada para la multiplicación. Entonces $\mathcal{H}$ contiene a*

$$\{f \in \mathbb{B}(X) : f \text{ es } \sigma(\mathcal{H}_0) - \mathcal{B}(\mathbb{R}) - \text{medible}\}.$$

Demostración. La idea de la demostración es apoyarse en el siguiente resultado que probaremos: dada cualquier clase $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$ que es cerrada por intersección y tal que $\mathcal{H} \supseteq \{\mathbb{I}_A : A \in \mathcal{C}\}$, $\mathcal{H}$ contiene a todas las indicatrices de conjuntos en $\sigma(\mathcal{C})$ (la clase $\mathcal{C}$ aquí mencionada se relacionará con $\mathcal{H}_0$ posteriormente). Más aún, $\mathcal{H}$ contiene a todas las funciones $\sigma(\mathcal{C})$-$\mathcal{B}(\mathbb{R})$-medibles y acotadas
La demostración de el resultado comienza con el caso de las indicatrices. Para ello, se define

$$\mathcal{I} \doteq \{A : \mathbb{I}_A \in \mathcal{H}\}.$$

Por lo tanto, lo que deseamos probar se traduce en $\mathcal{I} \supseteq \sigma(\mathcal{C})$. Para probar ésto haremos uso del π-λ-teorema, pues

- $\mathcal{I} \supseteq \mathcal{C}$.
- $\mathcal{I}$ es un λ-sistema (ejercicio).

Como además $\mathcal{C}$ es un π-sistema, el π-λ-teorema nos permite concluir que $\mathcal{I} \supseteq \sigma(\mathcal{C})$.
El paso siguiente es extender esta inclusión a la familia de funciones f que sean $\sigma(\mathcal{C}) - \mathcal{B}(\mathbb{R})$-medibles y acotadas. Lo que se debe hacer en este caso es comenzar con f simple, caso que es directo pues se trata de una combinación lineal de indicatrices en $\sigma(\mathcal{C})$. A continuación, estudiamos el caso de f medible, acotada y no negativa; para éste es necesario aproximar la función inferiormente por una sucesión de funciones simples $f_n \nearrow f$ (Lema 2.2.5), lo que por definición de EVM implica $f \in \mathcal{H}$. Para terminar, el caso de f general, como ya es usual

$$f = f_+ - f_- \in \mathcal{H},$$

pues $\mathcal{H}$ es espacio vectorial y tanto f_+ como f_- son medibles, no negativas y acotadas.

Notemos que el resultado previo reduce la demostración a encontrar una clase $\mathcal{C}$ que satisfaga $\sigma(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{H}_0)$ y tal que $\mathcal{H}$ contenga a las indicatrices en $\mathcal{C}$.
A continuación, buscaremos una clase $\mathcal{C}$ apropiada para probar el teorema. Para ello se presenta un propiedad general, la cual se deja como ejercicio. Sea F un conjunto de funciones a valores reales definidas sobre X; entonces se define la tribu generada por F como

$$\sigma(F) = \sigma(\{f^{-1}(C) : f \in F, C \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}).$$

Entonces, para cualquier familia $\mathcal{D}$ que genera a $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, se tiene que

$$\sigma(F) = \sigma(\{\cap_{i=1}^k f_i^{-1}(C_i) : f \in F, C_i \in \mathcal{D}, k \in \mathbb{N}\}).$$

La demostración de este hecho proviene de

- $\sigma(F) = \sigma(\{\cap_{i=1}^k f_i^{-1}(C_i) : f \in F, C_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), k \in \mathbb{N}\})$. Esta parte es fácil.
- $\sigma(\{\cap_{i=1}^k f_i^{-1}(C_i) : f \in F, C_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), k \in \mathbb{N}\}) = \sigma(\underbrace{\{\cap_{i=1}^k f_i^{-1}(C_i) : f \in F, C_i \in \mathcal{D}, k \in \mathbb{N}\}}_{=\mathcal{G}})$. Esta demostración tiene una parte directa ($\sigma(\mathcal{G}) \subseteq \sigma(F)$), y para la otra inclusión: defina, para $f \in F$ dado

  $$\tilde{\mathcal{B}} = \{B \subseteq \mathbb{R} : f^{-1}(B) \in \sigma(\mathcal{G})\}.$$

  Es fácil probar que $\mathcal{D} \subseteq \tilde{\mathcal{B}}$ y que $\tilde{\mathcal{B}}$ es una σ-álgebra. Luego,

  $$\sigma(\mathcal{D}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \tilde{\mathcal{B}}.$$

  Por lo tanto, dados $f_i \in F$, $C_i \in \tilde{\mathcal{B}}$, $i = 1, \ldots, k$

  $$f_i^{-1}(C_i) \in \sigma(\mathcal{G}),$$

  lo que implica que $\cap_{i=1}^k f_i^{-1}(C_i) \in \sigma(\mathcal{G})$. Esto prueba finalmente la inclusión

  $$\sigma(\mathcal{G}) \subseteq \sigma(\{\cap_{i=1}^k f_i^{-1}(C_i) : f \in F, C_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), k \in \mathbb{N}\}) = \sigma(F).$$

Por lo tanto, si tomamos $\mathcal{C} = \{\cap_{i=1}^k f_i^{-1}(C_i) :\ f \in F, C_i \in \mathcal{D},\ k \in \mathbb{N}\}$, se tiene que $\sigma(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{H}_0)$.
Inspirados por el resultado inicial de la demostración, buscaremos probar ahora que $\mathcal{H}$ contiene a las indicatrices de conjuntos en $\mathcal{C}$. Para esto partimos considerando $f \in \mathcal{H}_0$ y p polinomio. Notando que $p(f) = \sum_{i=1}^k a_i f^i$ es una combinación lineal de productos de elementos en $\mathcal{H}_0$, se tiene que $p(f) \in \mathcal{H}$. Esta propiedad la extenderemos a funciones continuas y acotadas, vía el Teorema de Stone-Weierstrass: para probar esto, consideramos $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y acotada, la cual puede ser aproximada uniformemente sobre el compacto $K = adh\, f(X)$ por una sucesión de polinomios p_n; con esto se obtiene

$$p_n(f) \to \phi(f) \qquad \text{uniformemente sobre X},$$

y como $\mathcal{H}$ es cerrado para la convergencia uniforme, $\phi(f) \in \mathcal{H}$. De esta propiedad se deduce que la familia de funciones continuas

$$\phi_n(y) = [1 \wedge ((y-a) \vee 0)]^{1/n}$$

cumplen que $\phi_n(f)$ pertenece a $\mathcal{H}$ para todo n. Además, es fácil ver que esta familia converge monótonamente a la función $\mathbb{1}_{\{f \geq a\}}$, y entonces por propiedad de $\mathcal{H}$

$$\mathbb{1}_{\{f \geq a\}} \in \mathcal{H}.$$

Reuniendo todo lo hecho: $\sigma(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{H}_0)$, $\mathcal{H}$ contiene a las indicatrices de conjuntos en $\mathcal{C}$ y el resultado inicial, se tiene que

$$\mathcal{H} \supseteq \{f \in \mathbb{B}(X) :\ f \text{ es } \sigma(\mathcal{H}_0) - \mathcal{B}(\mathbb{R}) - \text{medible}\}.$$

$\square$