Fecha / Date:

P2 [Primer Teorema de Helly]

a) Sea $f_n : X \to \mathbb{R}$ suc. unif. acot. y D numerable $\subseteq X$.

PD] $\exists f_{n_k} \longrightarrow f$ puntual % en D

Argumento diagonal:

Numeramos $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = D$ y ~~por~~

· Para $n=1$: Escogemos n_{k_1} subsuc. convergente de $f_n(x_1)$ (pues esta suc. es acotada en $\mathbb{R}$).

· Para $n+1$: Tenemos $n_{k_n} \subseteq n_{k_i}$ $\forall i < n$ y tq $f_{n_{k_n}}(x_n) \xrightarrow{k_n \to \infty} \alpha$

$n \backslash n_k$	1	2	3	4	5	6		
1	$\boxed{1}$	2	3	4	5	6	...	K_1
2	1	2	3	$\boxed{4}$	5	6	...	$K_2 \subseteq K_1$
3	1	2	3	4	5	6	$\square$	$K_3 \subseteq K_2$
4	1	2	3	4	5	6	—	$K_4 \subseteq K_3$
5	1	2	3	4	5	6	— —	$K_5 \subseteq K_4$
6	1	2	3	4	5	6	— —	$K_6 \subseteq K_5$
7	1	2	3	4	5	6	— —	

Todas infinitas

Construimos $n_{k_{(n+1)}} \subseteq n_{k_n}$ tal que $f_{n_{k(n+1)}}(x_{n+1})$ conv. (posible pues $(f_{n_{k_n}}(x_{n+1}))_{k_n}$ es acotada).

Por otra parte $f_{n_{k_{(n+1)}}}(x_n)$ converge, pues es subsucesión de $f_{n_{k_n}}(x_n)$.

Para terminar se escoge la diagonal $(n_{k_n})_n \subseteq \mathbb{N}$ como subsucesión, la cual satisface

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \left(f_{n_{k_m}}(x_n)\right)_{k_m} \subseteq \left(f_{n_{k_n}}(x_n)\right)_{k_n}$$

$$\Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N}) \quad f_{n_{k_n}}(x_n) \text{ converge}$$

$\therefore$ $f_{n_{k_n}}$ converge puntualmente sobre D ▨

b) $A \subseteq [a,b]$ $a \in A$ $b = \sup(D)$. $f_n : D \to \mathbb{R}$ ~~es creciente~~ sean no-decrec., f se puede extender sobre $[a,b]$ de forma no decreciente

Notemos que si $a \neq \inf(D)$, entonces podemos extender $f \equiv \inf f(D)$ sobre $[a, \inf(D)]$, lo cual satisface el no decrecimiento.

$\therefore$ spg $a = \inf(D)$

Podemos ahora definir $f(x)$, para $x \notin D$ como

$$f(x) = \inf_{\substack{y \in D \\ y > x}} f(y)$$

Notas / Notes:

RHEIN

Fecha / Date:

Esta def. tiene sentido y hace a $\overline{f}:[a,b]\to\mathbb{R}$ no decrec.
En efecto, si $x_1<x_2$

$$\overline{f}(x_1)=\inf_{\substack{y\in D\\ y>x_1}} f(y)\leq \inf_{\substack{y\in D\\ y>x_2}} f(y)=\overline{f}(x_2) \qquad \{y\in D: y>x_1\}\supseteq\{y\in D: y>x_2\}$$
$$\xrightarrow{f\nearrow} \inf f(\{\cdot>x_1\})\leq \inf f(\{\cdot>x_2\})$$

d) $(f_n)_n\subseteq BV$, acotada $\|f_n\|_{BV}\leq K \ \forall n$

Ya sabemos que f_{n_k} cvge puntual% sobre $D\subseteq[a,b]$ denso (es una suc. unif. acotada).

$$\|f_n\|_{BV}=|f_n(a)|+V_a^b(f_n) \Rightarrow \|f_n\|_\infty\leq \|f_n\|_{BV}\leq K$$

$$\Rightarrow f_n=f_n^C-f_n^D \quad \text{ambas crecientes}$$

Entonces $f_{n_k}(x)\longrightarrow f(x)\ \forall x\in[a,b]$

Notamos que para toda particion $\{x_0=a,\dots,x_n=b\}=P\subseteq\mathcal{P}_a^b$

$$\cdot\ |f_{n_k}(a)|+\sum_{i=1}^{n}|f_{n_k}(x_i)-f_{n_k}(x_{i-1})|\leq K$$
$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$
$$f(a) \qquad f(x_i) \qquad f(x_{i-1})$$

~~Id~~ $f_{n_k}(a)\longrightarrow f(a)$

$$\Rightarrow \ \cancel{\forall}\ \|f_{\cancel{n_k}}\|_{BV}\leq K, \text{ por ende } f\in BV[a,b]$$

P1| c) Si $\mu\neq\nu$ y ambas ergódicas, por el teo. de Lebesgue $\exists\,\nu_a,\nu_s$ tq $\nu=\nu_a+\nu_s$ $\nu_a\ll\mu$, $\nu_s\perp\mu$

Como $\nu_a(X)+\nu_s(X)=1$, es fácil normalizar $\nu=\lambda\pi_a+(1-\lambda)\pi_s$

Por otra parte, definamos $\tilde{\pi}_a(A)=\pi_a(T^{-1}A)$, $\tilde{\pi}_s(A)=\pi_s(T^{-1}(A))$, $\tilde{\mu}(A)=\mu(T^{-1}A)$
Entonces

$\cdot\ \nu(A)=\tilde{\nu}(A)=\lambda\pi_a(T^{-1}A)+(1-\lambda)\pi_s(T^{-1}A)=\lambda\tilde{\pi}_a(A)+(1-\lambda)\tilde{\pi}_s(A)$

$\cdot$ ~~⇒~~ $\tilde{\pi}_a\ll\tilde{\mu}=\mu$, $\tilde{\pi}_s\perp\tilde{\mu}=\mu$

Y por unicidad de la desc., $\pi_a=\tilde{\pi}_a$ y $\pi_s=\tilde{\pi}_s$; en consecuencia $\pi_a,\pi_s\in\underline{\Delta}(X,T)$. Final%, como μ es pto extremo $\lambda\in\{0,1\}$

$\lambda=0$| OK!

$\lambda=1$| $\nu\ll\mu$. Usando R-N: $\nu(A)=\int_A f\,d\mu$. Siguiendo la lógica de b)(II) se obtiene que

Notas / Notes:

$\mu=\nu$