TEORÍA DE LA MEDIDA – CONTROL 2

JAIME SAN MARTÍN, ANDRÉS FIELBAUM, CRISTÓBAL GUZMÁN
30 DE OCTUBRE 2009

P1. Sea $(X, \mathcal{B}, \mu)$ espacio de medida σ-finito. Sea $p \in (1, \infty)$, sea $(f_n)_{n \in \mathcal{N}}$ una sucesión de funciones en L^p tal que $f_n \to f$ ctp y $\sup_{n \in \mathbb{N}} ||f||_{L^p} < \infty$. Probaremos que f_n converge débilmente a f en L^p, es decir para todo ℓ funcional lineal continuo sobre L^p se tiene $\ell(f_n) \to \ell(f)$. Para probar esto se pide:

(a) Muestre que $f \in L^p$

(b) Sea $g \in L^q$ (con q el Holder-conjugado de p), $\varepsilon > 0$. Pruebe que:

  (I) $\exists \delta > 0$ tal que $\forall A \in \mathcal{B}, \mu(A) < \delta \Rightarrow \int_A |g|^q d\mu < \varepsilon$

  (II) $\exists B \in \mathcal{B}$ de medida finita tal que $\int_{B^c} |g|^q d\mu < \varepsilon$

  (III) $\exists D \subseteq B$ medible tal que $\mu(B \setminus D) < \delta$ y $f_n \to f$ uniformemente en D

(c) Concluya el resultado

(d) Muestre que lo anterior no es válido para $p = 1$. *Hint: Busque el contraejemplo en* $\mathbb{R}$ *con la medida de Lebesgue.*

P2. (a) Decimos que $x \in \mathbb{R}$ es un punto de densidad de $A \in \mathcal{L}$ si el siguiente limite existe y es 1

$$\lim_{r \downarrow 0} \frac{\mu(A \cap (x - r, x + r))}{2r} = 1$$

Pruebe que para todo $A \in \mathcal{L}$ y para casi todo $x \in A$, x es un punto de densidad de A.
Ind. Si A es acotado considere $F(x) = \int_{-\infty}^{x} \mathbf{1}_A(z)\, dz$.

En lo que sigue consideremos $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$.

(b) Si f es absolutamente continua entonces satisface la propiedad $\mathcal{N}$ es decir: para todo $N \in \mathcal{L}$

$$\mu(N) = 0 \Rightarrow [f(N) \in \mathcal{L} \text{ y } \mu(f(N)) = 0].$$

(c) **ENTREGAR SI LO DESEA COMO TAREA.** Suponga que f es continua y creciente. Si f satisface la propiedad $\mathcal{N}$ entonces probar que f es absolutamente continua.

P3. (a) Sean F y G funciones de variación acotada, continuas por la derecha y tales que $F(-\infty) = G(-\infty) = 0$. Pruebe que si al menos una de ellas es continua, entonces para $-\infty < a < b < \infty$,

$$\int_{(a,b]} F(x)\, dG(x) + \int_{(a,b]} G(x)\, dF(x) = F(b)G(b) - F(a)G(a).$$

Indicación: Piense en el Teorema de Fubini. Además si quiere pruebe el resultado: dada H una función acotada y continua por la derecha, que tiene limite por la izquierda y F de v.a. continua, entonces $\int_{(a,b]} H(y-)dF(y) = \int_{(a,b]} H(y)dF(y)$.

(b) Consideremos $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ el espacio de las medidas con signo finitas sobre $\mathbb{R}$. Para cada medida con signo $\nu \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ definimos su función de distribución $F_\nu(x) = \nu((-\infty, x])$.

Consideremos ahora $\mu, \mu_n \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$. Se dice que $(\mu_n)_n$ converge *vagamente* a μ si

$$\int f\, d\mu_n \to \int f\, d\mu \quad \forall f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}).$$

Esta convergencia se denota por $\mu_n \rightharpoonup \mu$. Denotamos por $F_n = F_{\mu_n}$ y $F = F_\mu$. Pruebe que si las variaciones de $(\mu_n)_n$ son uniformemente acotadas es decir

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |\mu_n|(\mathbb{R}) < \infty,$$

y $F_n(x) \to F(x)$ para todo punto x de continuidad para F, entonces $\mu_n \rightharpoonup \mu$.
Ind. Considere primero $f \in \mathcal{C}_0^\infty$ y use la parte (a).

TIEMPO 3 hrs.