Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

Auxiliar Teoría de la Medida

Profesor: Jaime San Martín
Auxiliares: Cristobal Guzmán, Andrés Fielbaum

TEOREMA Sea (X,τ) espacio topológico Haussdorf y localmente compacto. Sea L una medida de Radon positiva sobre X. Entonces existe una única medida regular μ sobre $(X,\mathcal{B}(X))$ tal que $L(f)=\int f d\mu$.

Pregunta 1 Sea (X,d) un espacio métrico compacto, sea $T:X\to X$ una función continua y sobreyectiva. Por ser X compacto, se tiene que $\mathcal{C}(X)$ dotado de la norma del supremo, es separable. Sea entonces $(f_n)_n$ denso numerable. Queremos probar que existe una medida $T-$*invariante*, i.e., μ tal que $\mu=T\mu$, donde $T\mu(B)=\mu(T^{-1}(B))$. Para ello:
(i) Fije $x\in X$. Para $f\in\mathcal{C}(X), N\in\mathbb{N}$, defina $S_f^N=\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}f(T^i(x))$. Pruebe que existe una subsucesión N_j tal que $lim_{j\to\infty}S_{f_n}^{N_j}$ existe $\forall n\in\mathbb{N}$. Lo notaremos $S_{f_n}^\infty$
(ii) Pruebe que $\forall g\in\mathcal{C}(X)$, el mismo límite existe, al que notaremos S_g^∞.
(iii) Concluya que existe una única medida de probabilidad regular μ tal que $S_g^\infty=\int g d\mu \forall g$, y pruebe que esa medida es μ-invariante.

Pregunta 2 Diremos que $A,B\subseteq\mathbb{R}^2$ son congruentes si A es una *rotación* de B, i.e., si $\exists\alpha$ tal que $A=T_\alpha B$, donde T es la matriz $\begin{pmatrix} cos\alpha & sin\alpha \\ -sin\alpha & cos\alpha\end{pmatrix}$. Notemos por μ la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^2$.
(i) Pruebe que si A es medible y B es congruente con A, entonces B es medible y $\mu(A)=\mu(B)$. Concluya que es imposible particionar un conjunto medible de medida finita en numerables conjuntos congruentes entre sí.

En $\mathbb{R}^m$ ahora, diremos que $E\subseteq\mathbb{R}^m$ es *especial* si $\cup_{n\in\mathbb{Z}^m}E+n=\mathbb{R}^m$ y $E+i\cap E+j=\emptyset$ si $i\neq j$.

(ii) Pruebe que $D=[0,1)^m$ es especial.
(iii) Suponga ahora E es especial. Notemos $D_n=D+n$ para $n\in\mathbb{Z}^m$, y $E_n=-n+E\cap D_n$. Pruebe que $\cup_{n\in\mathbb{Z}^m}E_n=D$. Concluya que si E es medible, entonces $\mu(E)=1$.