TEORÍA DE LA MEDIDA – CONTROL 2

JAIME SAN MARTÍN, ANDRÉS FIELBAUM, CRISTÓBAL GUZMÁN
30 DE OCTUBRE 2009

P1. Sea $(X, \mathcal{B}, \mu)$ espacio de medida σ-finito. Sea $p \in (1, \infty)$, sea $(f_n)_{n \in \mathcal{N}}$ una sucesión de funciones en L^p tal que $f_n \to f$ ctp y $\sup\limits_{n \in \mathbb{N}} ||f||_{L^p} < \infty$. Probaremos que f_n converge débilmente a f en L^p, es decir para todo ℓ funcional lineal continuo sobre L^p se tiene $\ell(f_n) \to \ell(f)$. Para probar esto se pide:

1.5 (a) Muestre que $f \in L^p$

1.5 (b) Sea $g \in L^q$ (con q el Holder-conjugado de p), $\varepsilon > 0$. Pruebe que:

- 0,5 (I) $\exists \delta > 0$ tal que $\forall A \in \mathcal{B}, \mu(A) < \delta \Rightarrow \int_A |g|^q d\mu < \varepsilon$
- 0,5 (II) $\exists B \in \mathcal{B}$ de medida finita tal que $\int_{B^c} |g|^q d\mu < \varepsilon$
- 0,5 (III) $\exists D \subseteq B$ medible tal que $\mu(B \setminus D) < \delta$ y $f_n \to f$ uniformemente en D

1.5 (c) Concluya el resultado

1.5 (d) Muestre que lo anterior no es válido para $p = 1$. *Hint: Busque el contraejemplo en* $\mathbb{R}$ *con la medida de Lebesgue.*

P2. (a) Decimos que $x \in \mathbb{R}$ es un punto de densidad de $A \in \mathcal{L}$ si el siguiente limite existe y es 1

$$\lim_{r \downarrow 0} \frac{\mu(A \cap (x - r, x + r))}{2r} = 1$$

Pruebe que para todo $A \in \mathcal{L}$ y para casi todo $x \in A$, x es un punto de densidad de A.
Ind. Si A es acotado considere $F(x) = \int_{-\infty}^{x} \mathbf{1}_A(z)\, dz$.

En lo que sigue consideremos $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$.

(b) Si f es absolutamente continua entonces satisface la propiedad $\mathcal{N}$ es decir: para todo $N \in \mathcal{L}$

$$\mu(N) = 0 \Rightarrow [f(N) \in \mathcal{L} \text{ y } \mu(f(N)) = 0].$$

(c) **ENTREGAR SI LO DESEA COMO TAREA.** Suponga que f es continua y creciente. Si f satisface la propiedad $\mathcal{N}$ entonces probar que f es absolutamente continua.

P3. (a) Sean F y G funciones de variación acotada, continuas por la derecha y tales que $F(-\infty) = G(-\infty) = 0$. Pruebe que si al menos una de ellas es continua, entonces para $-\infty < a < b < \infty$,

$$\int_{(a,b]} F(x)\, dG(x) + \int_{(a,b]} G(x)\, dF(x) = F(b)G(b) - F(a)G(a).$$

Indicación: Piense en el Teorema de Fubini. Además si quiere pruebe el resultado: dada H una función acotada y continua por la derecha, que tiene limite por la izquierda y F de v.a. continua, entonces $\int_{(a,b]} H(y-) dF(y) = \int_{(a,b]} H(y) dF(y)$.

(b) Consideremos $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ el espacio de las medidas con signo finitas sobre $\mathbb{R}$. Para cada medida con signo $\nu \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ definimos su función de distribución $F_\nu(x) = \nu((-\infty, x])$.

Consideremos ahora $\mu,\mu_n \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$. Se dice que $(\mu_n)_n$ converge *vagamente* a μ si

$$\int f\, d\mu_n \to \int f\, d\mu \quad \forall f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}).$$

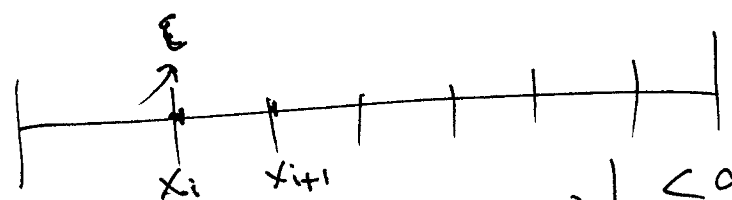
Esta convergencia se denota por $\mu_n \rightharpoonup \mu$. Denotamos por $F_n = F_{\mu_n}$ y $F = F_\mu$. Pruebe que si las variaciones de $(\mu_n)_n$ son uniformemente acotadas es decir

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |\mu_n|(\mathbb{R}) < \infty,$$

y $F_n(x) \to F(x)$ para todo punto x de continuidad para F, entonces $\mu_n \rightharpoonup \mu$.
Ind. Considere primero $f \in \mathcal{C}_0^\infty$ y use la parte (a).

TIEMPO 3 hrs.

$\sum F_n(x_{i+1}) - F_n(x_i)$



$\sum |F(x) - F(x-)| < \infty.$

$\sum |F(x_{i+1}) - F(x_i)| = \lim \sum |F_n(x_{i+1}) - F_n(x_i)|$

$\leq$

$\sum |F(x_i) - F(x_{i-1})|$

$\forall i \ \tilde{x}_i \geq x_i \quad |F(x_i) - F(\tilde{x}_i)| < \epsilon / 2nM$

$\sum |F(x_{i+1}) - F(x_i)| \leq \sum |F(x_{i+1}) - F(\tilde{x}_i)$

$- F(\tilde{x}_{i+1}) + F(\tilde{x}_{i+1}) - F(\tilde{x}_{i+1}) - F(\tilde{x}_i)$

PAUTA CONTROL 2 MA3801 - 2009 | Fecha / Date:

P1) $(X,\mathcal{B},\mu)$ σ-finito. $f_n \to f$ ctp y $\sup_n \|f_n\|_p < +\infty$

(a) Por Fatou

$$\int_X |f|^p d\mu \leq \liminf_n \int |f_n|^p d\mu$$
$$\leq \sup \int |f_n|^p d\mu$$
$$< +\infty$$

($|f|^p = \lim_n |f_n|^p$)

(b) Sea $g \in L^q(X)$

(i) $$\int_E |g|^q d\mu = \int_{E\cap\{|g|^q \geq n\}} |g|^q d\mu + \int_{E\cap\{|g|^q<n\}} |g|^q d\mu$$
$$\leq \underbrace{\int_{\{|g|^q \geq n\}} |g|^q d\mu}_{\to 0 \text{ por TCD } (\text{si } n\to\infty)} + n\,\mu(E)$$

~~Escogemos~~

· Luego, se escoge n_0 tq $\forall n \geq n_0$ $\int_{\{|g|^q\geq n\}} |g|^q d\mu < \frac{\epsilon}{2}$

Después, se escoge $\delta = \frac{\epsilon}{2n_0}$, obteniendo

$$\mu(E) < \delta \implies \int_E |g|^q d\mu < \frac{2\epsilon}{2} = \epsilon$$

(ii) Sean B_n cjtos medibles, de med. finita y crecientes a X (posible pues μ es σ-finita).

Como · $\mathbb{1}_{B_n^c}\cdot|g|^q \xrightarrow{ctp} 0 \quad (n\to\infty)$

· $\mathbb{1}_{B_n^c}|g|^q \leq |g|^q \in L^1$,

por el TCD: $\int_{B_n^c} |g|^q d\mu \to 0$, si $n\to\infty$

Luego, para algún $\bar{n}$ grande, dicha integral es menor a ϵ. Finalmente, $B = B_{\bar{n}}$.

(iii) Como B es de medida finita, podemos usar el teorema de Egorov, concluyendo que existe $D\subseteq B$

$$\mu(B\setminus D) < \delta \quad \text{y} \quad f_n \to f \text{ unif. sobre } D.$$

Notas / Notes:

RHEIN

Fecha / Date:

(c) Queremos probar que $\forall \ell \in (L^p)^*$ $\ell(f_n) \longrightarrow \ell(f)$.

Como $(L^p)^*$ se identifica con L^q, probaremos la convergencia débil a través de las sgtes integrales.

PD| $\int_X f_n g \, d\mu \longrightarrow \int_X f \cdot g \, d\mu \quad \forall g \in L^q$

- $\left|\int_X (f_n - f) \cdot g \, d\mu\right| \overset{(2)}{\leq} \int_{B^c} |f_n - f| \cdot |g| \, d\mu + \int_B |f_n - f| \cdot |g| \, d\mu$

$\overset{\text{Hölder}}{\leq} \|f_n - f\|_p \|g \mathbb{1}_{B^c}\|_q + \int_B |f_n - f||g| \, d\mu$

Notemos que: $\|f_n - f\|_p \leq \underbrace{\|f_n\|_p}_{\leq C} + \|f\|_p \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Ahora usaremos (iii) para acotar la integral de la derecha, escogiendo δ para cumplir (i)

$$\left|\int_X (f_n - f) \cdot g \, d\mu\right| \leq M \cdot \underbrace{\|g \mathbb{1}_{B^c}\|_q}_{< \epsilon^{1/q}} + \underbrace{\int_D |f_n - f| \cdot |g| \, d\mu}_{(1)}$$

$$+ \int_{B \setminus D} |f_n - f| \cdot |g|$$

(1) Como $f_n \to f$ unif en D, esta integral tiende a 0 con n, por lo que a partir de n_0 suf grande

$$\int_D |f_n - f||g| \, d\mu < \epsilon$$

(2) $\int_{B \setminus D} |f_n - f||g| \, d\mu \leq \|f_n - f\|_p \cdot \|g \cdot \mathbb{1}_{B \setminus D}\|_q$

$\leq M \cdot \epsilon$ (pues se cumple (i))

En definitiva:

$$\left|\int (f_n - f) g \, d\mu\right| \leq M\epsilon^{1/q} + \epsilon + M\epsilon < M\epsilon^{1/q} + (M+1)\epsilon \quad / \overline{\lim}$$

$$\Rightarrow \overline{\lim_n} \left|\int \cdots\right| \leq M\epsilon^{1/q} + (M+1)\epsilon \quad \forall \epsilon > 0$$

$$\therefore \overline{\lim_n} \left|\int (f_n - f) g\right| = 0$$

$$\therefore f_n \xrightarrow{*} f \; //$$

RHEIN

Notas / Notes: