P2)

i) SI A ES ACOTADO, $1_A \in L^1$. POR TEOREMA, SI $F(x) = \int_{-\infty}^{x} 1_A(z)\,dz$, SE TIENE

$F'(x) = 1_A(x)$ CTP.

PERO $\lim_{r \downarrow 0} \frac{\mu(A \cap (x-r, x+r))}{2r} = \lim_{r \downarrow 0} \frac{F(x+r) - F(x-r)}{2r} =$

$F'(x) = 1_A(x)$ (CTP)

SI $x \in A$, $1_A(x) = 1$.

SI A ES NO ACOTADO, EL RESULTADO SE TIENE PARA $A_m := A \cap [m, m+1]$ $\forall$ $m \in \mathbb{Z}$. COMO PARA TOMAR EL LÍMITE BASTA UNA PEQUEÑA BOLA, $x \in A_m$ ES PUNTO DE DENSIDAD EN $A_m \iff$ LO ES EN A (SALVO QUIZÁ $m \in \mathbb{Z}$, PERO TIENEN MEDIDA NULA).

COMO UNIÓN NUMERABLE DE DESPRECIABLES ES DESPRECIABLE, SE CONCLUYE.

ii) SEA $\varepsilon > 0$, δ DE LA ABS. CONTINUIDAD. $\mu(N) = 0 \Rightarrow \exists \{(a_m, b_m]\}_{m \in \mathbb{N}}$ TQ $N \subseteq \dot{\bigcup} (a_m, b_m]$ Y $\sum_m b_m - a_m < \delta$.

SEAN c_m, d_m LOS PUNTOS DONDE f SE MINIMIZA Y MAXIMIZA EN $[a_m, b_m]$, RESPECTIVAMENTE.

LUEGO $f(N) \subseteq \bigcup_m f((a_m, b_m]) \subseteq \bigcup_m (f(c_m), f(d_m))$

$\mu(f(N)) \leq \sum_m f(d_m) - f(c_m) < \varepsilon$ (PUES $\sum_m d_m - c_m \leq \sum_m b_m - a_m \leq \delta$)

$\therefore f(N) \in \mathcal{L}$, $\mu(f(N)) = 0$

P3) (a) PROBEMOS EL HINT. H A VARIACIÓN ACOTADA $\Rightarrow$ ES DIFERENCIA DE DOS CRECIENTES $\Rightarrow$ TIENE A LO MÁS NUMERABLES PUNTOS DE DISCONTINUIDAD $\Rightarrow$ $H = H^-$ dF - CTP (PUES F CONTINUA $\Rightarrow$ LOS SINGLETON TIENEN MEDIDA NULA).

LUEGO $\displaystyle\int_{(a,b]} F(x)\,dG(x) \underset{F(-\infty)=0}{=} \int_{(a,b]}\int_{(-\infty,x]} dF(z)\,dG(x) \underset{\text{TONELLI}}{=}$

$$\int_{(-\infty,a]}\int_{(a,b]} dG(x)\,dF(z) + \int_{(a,b]}\int_{[z,b]} dG(x)\,dF(z) = \int_{(-\infty,a]} G(b) - G(a)\,dF(z)$$

$$+ \int_{(a,b]} G(b) - G(z^-)\,dF(z) = G(b)F(a) - G(a)F(a) + G(b)F(b)$$

$$- G(b)F(a) - \int_{(a,b]} G(z)\,dF(z)$$

■

(b) SEA $f \in C_0^\infty$. LUEGO $\displaystyle\int f\,d\mu_n = \int_{(a,b]} f\,dF_n$ PARA

$(a,b] \supseteq sop(f)$. PERO POR LO PARTE (a), COMO f ES CONTINUA Y DIFERENCIABLE, ES A VARIACIÓN ACOTADA, LUEGO

$$\int_{(a,b]} f\,dF_n = F_n(b)f(b) - F_n(a)f(a) - \int_{(a,b]} F_n(x)\,df(x)$$

COMO F ES A VARIACIÓN ACOTADA, TIENE A LO MÁS UNA CANTIDAD NUMERABLE DE DISCONTINUIDADES, LUEGO SPG a, b SON PUNTOS DE CONTINUIDAD DE F.

LUEGO $F_n(b) f(b) - F_n(a) f(a) \to F(b) f(b) - F(a) f(a)$

ADEMÁS $|F_n(x)| = |\mu_n((-\infty, x])| \leq |\mu|(\mathbb{R}) \leq A$ (cte).

COMO f ES ACOTADA EN $(a,b]$, $K \in L^1((a,b], df)$,

ADEMÁS $F_n \to F$ CTP, LUEGO $\int_{(a,b]} F_n(x)\, df(x) \to \int_{(a,b]} F(x)\, df(x)$

Y SE TIENE EL RESULTADO.

SI $f \in C_0(\mathbb{R})$, SEA $K = sop(f)$, SEA g POLINOMIO EN K TQ $\|f - g\|_\infty \leq \varepsilon$.

LUEGO $\left|\int f\, d\mu_n - \int f\, d\mu\right| \leq \left|\int f - g\, d\mu_n\right|$

$+ \underbrace{\left|\int g\, d\mu_n - \int g\, d\mu\right|}_{= I_2^n} + \left|\int (f-g)\, d\mu\right| \leq$

$\int |f - g|\, d|\mu_n| + I_2^n + \int |f-g|\, d|\mu| \leq$

$\varepsilon A + I_2^n + \varepsilon A$ CON $A = \sup_n |\mu_n|(\mathbb{R})$

COMO $I_2^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, TENEMOS QUE $\overline{\lim} \left|\int f\, d\mu_n - \int f\, d\mu\right| \leq 2$

$\forall \varepsilon \Rightarrow \int f\, d\mu_n \to \int f\, d\mu$.

$\therefore \mu_n \to \mu$